Evaluation du 25 novembre 2024

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $g(x) = 1 + x - \ln(x)$.
   (a) Calculer la dérivée de g.
   (b) En déduire le sens de variation de g, puis que g admet un minimum en 1.
   (c) Calculer $g(1)$. Quel est le signe de g ?
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = x^{\frac{x+1}{x}}$. On rappelle que, par définition des puissances, on a
$$f(x) = \exp(\frac{x+1}{x}\ln(x))$$
   (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}\ln(x)$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   (c) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$ on a
$$f'(x) = \frac{f(x)g(x)}{x^2}$$
   (d) En déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.

Correction

1. *(a) On a* $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$
   (b) On a $g'(x) > 0$ *si et seulement si* $\dfrac{1}{x} < 1$, *c'est-à-dire (puisque* $x > 0$*)* $x > 1$. *Donc* g *est décroissante jusqu'en* $x = 1$, *et croissante ensuite.*
   (c) On a $g(1) = 1 + 1 - 0 = 2$. *Donc* g *est positive.*
2. *On a* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x}\ln(x) = +\infty$. *Donc par composition* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   En 0 il n'y a pas de forme indéterminée : on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x}\ln(x) = -\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

   (b) *On calcule déjà la dérivée de* $\dfrac{x+1}{x}\ln(x)$ *: c'est*
$$\frac{x-(x+1)}{x^2}\ln(x) + \frac{x+1}{x}\frac{1}{x} = \frac{-\ln(x) + x + 1}{x^2}$$
   Donc la dérivée de f *est*
$$f'(x) = \exp(\frac{x+1}{x}\ln(x)) \cdot \left(\frac{\ln(x) + x}{x^2}\right) = f(x)\frac{g(x)}{x^2}$$

(c) Vu que f est positive, g aussi, f est croissante.