Evaluation du 25 novembre 2024

Savoir faire

- SF17 : Savoir calculer une limite savoir factoriser/simplifier pour lever une FI
- SF15 :Savoir calculer une limite à l'aide des croissances comparées
- SF 22 : Savoir calculer une dérivée de fonction usuelle (polynôme,cos, sin, tan, ln, exp)
- SF 25 : Savoir calculer une dérivée d'une fonction composée

1. Calculer les limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(x)-x^2}{x^2+7}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
   On pourra penser à multiplier par l'expression conjuguée $-\sqrt{1+x}-1$
   (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}$
2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
   (a) $\exp(x^2)\sin(\sqrt{x})$
   (b) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{2x+1})}{\cos(x)}$

Correction

1. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\ln(x)-x^2}{x^2+7} = -1$ *(on factorise par le terme dominant)*

(b) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(-\sqrt{1+x}-1)}{x(-\sqrt{1+x}-1)} = \dfrac{1-(1+x)}{x(-\sqrt{1+x}-1)} = \dfrac{1}{-1-\sqrt{1+x}}$.

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}-1x = -\dfrac{1}{2}$ *(on pouvait aussi reconnaître la limite d'un taux d'accroissement, donc la dérivée de* $x\mapsto\sqrt{x}$ *en 1, qui vaut* $-1/2$*).*

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\exp(\sqrt{x}-x^2)\dfrac{1+e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{-x^2}}$. *La fraction tend vers 1, et on a* $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-x^2=-\infty$ *donc par composition* $\lim\exp(\sqrt{x}-x^2)=0$. *Donc la limite est égale à* 0.

2. (a) $\exp(x^2)\sin(\sqrt{x})$ *a pour dérivée* $2xe^{x^2}\sin(\sqrt{x}) + \dfrac{e^{x^2}}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$

(b) $\dfrac{\ln(1+\sqrt{2x+1})}{\cos(x)}$ *: on calcule déjà la dérivée de* $\ln(1+\sqrt{2x+1}$ *: c'est* $\dfrac{2/2\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}+2x+1}$. *Maintenant la dérivée de la fonction qu'on veut est*

$$\frac{-\frac{\cos(x)}{2x+1+\sqrt{2x+1}}+\sin(x)\ln(1+\sqrt{2x+1})}{\cos^2(x)}$$