Evaluation du 18 novembre 2024

On note f la fonction définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
On admettra que cette fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de f. Simplifier au maximum. Quel est le sens de variation de f ?
3. Calculer $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)$, en déduire que pour tout x on a $\sqrt{x^2+1}+x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.
4. En déduire que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Correction

1. On a par calcul direct $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. La dérivée de f est donnée par

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

On a donc $f'(x) > 0$ pour tout x, et donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. On fait le produit $(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x) = x^2+1-x^2 = 1$. En divisant on obtient le résultat demandé.

4. On a donc $f(x) = \ln(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}) = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$. Pour x tendant vers $-\infty$ on a $\sqrt{x^2+1}-x$ qui tnd vers $+\infty$, par calcul direct. Donc $\lim_{x \to -\infty} \ln(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$ et on a le résultat souhaité pour f en prenant l'opposé.