Evaluation du 15 novembre 2024

Durée : 1h30m (tiers-temps :2h)
Calculatrices et documents interdits

Exercice 1

Savoir faire

- SF31 : Connaître les valeurs importantes de ln/exp

Donner (en fonction de $x, y > 0$ si besoin) la valeur de $\ln(e)$, $\ln(1)$, e^0, $e^{\ln(x)}$, e^{x-y}, $\ln(xy)$.

Exercice 2

Savoir faire

- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

a) $\ln(\frac{2}{\sqrt{2}})$

b) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

c) pour $x > 0$, $\ln(2x) - \ln(\sqrt{x})$

d) $\ln(2e^3)$

Exercice 3

Savoir faire

- SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression

Simplifier au maximum les expression suivantes :

a) $\dfrac{e^{2x}e^{-x+1}}{(e^x)^2}$

b) pour $x > 0$, $e^{\frac{1}{2}\ln(x)}$

c) $\left(\dfrac{2^2 2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)^2$

d) $e^{2\ln(3)}$

Simplifier au maximum les expressions suivantes :

Exercice 4

Savoir faire

- SF46 : Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo.

1. Remplir (ou recopier) le tableau suivant :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(x)$						
$\sin(x)$						

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, donner, en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$, la valeur de $\sin(\pi/2-x)$, $\cos(\pi-x)$, $\cos(-x)$, $\sin(\pi+x)$.

Exercice 5

Savoir faire

- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique

Calculer les nombres complexes suivants :

1. $(-1+i)(2+3i)-4$
2. $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-i)$
3. $(1-2i)^2$

Exercice 6

Savoir faire

- SF78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué

Mettre sous forme algébrique $(a+ib)$ les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{1+2i}$
2. $\dfrac{1+i}{2-3i}$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

Exercice 7

Savoir faire

- SF79 : Mettre sous forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $-3+3i$
2. $-2i$
3. $\sqrt{3}+i$

Exercice 8

Savoir faire

- SF39 :Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

1. $\sqrt{x^2 - 3x + 2}$
2. $\ln(x-1) - \ln(x+1)$
3. $\ln(|e^x - 1|)$

Exercice 9

Savoir faire

- SF4 :Savoir identifier une fonction composée (fonction de $\mathbb{R}$ -> $\mathbb{R}$)

Ecrire comme composition d'au moins deux fonctions usuelles (que vous préciserez) les fonctions suivantes :

1. $\sin(\sqrt{x})$
2. $\ln(\frac{1}{x})$
3. $\exp(\cos(x))$

Exercice 10 *Niveau attendu*

On rappelle que la fonction tangente est définie par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

1. Quel est le domaine de définition de tan ? La fonction tan est-elle paire ? Impaire ? Périodique (et dans ce cas, quelle est sa période minimale) ?
2. On pose $f(x) = \ln(\tan(x))$ et $g(x) = \ln(|\tan(x)|)$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ? de g ?
   (b) Calculer $f(\pi/4)$ et $g(-\pi/3)$. Simplifier au maximum.
   (c) La fonction f est-elle paire ? Impaire ? Périodique ? Et la fonction g ?
   (d) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $f(x) = \ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))$?

Correction

1. *La fonction* tan *est définie pour* $\cos(x) \neq 0$*, c'est-à-dire si* $x \neq \pi/2 + k\pi$ *avec* k *entier. Elle est impaire et* π*-périodique.*
2. (a) f *est définie quand* $\tan(x) > 0$*. Pour* x *entre* 0 *et* π*, cela arrive si* $x \in]0, \pi/2[$*. Vu que* tan *est* π*-périodique, l'ensemble de définition de* f *est la réunion des intervalles de la forme* $]k\pi, k\pi + \pi/2[$ *pour* $k \in \mathbb{Z}$*.*
   De même, g *est définie pour* $\tan(x) \neq 0$*, donc pour* $\cos(x) \neq 0$ *et* $\sin(x) \neq 0$*, c'est-à-dire* $x \neq k\pi/2$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$*.*
   (b) *On a* $f(\pi/4) = \ln(1) = 0$ *et* $g(-\pi/3) = \ln(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\ln(3)$*.*
   (c) *La fonction* f *n'est ni paire ni impaire mais la fonction* g *est paire. Les deux*

fonctions sont π-périodiques.

(d) *Cela fonctionne dès que* $\sin(x) > 0$ *et* $\cos(x) > 0$, *donc pour* $x \in]0, \pi/2[+ 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11 *Niveau avancé*

Le but de cet exercice est de montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ il existe une fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier la propriété pour $n = 0$ ou $n = 1$. Calculer f_0 et f_1.
2. Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$ et en déduire f_2.
3. Calculer la partie réelle de $(e^{ix})^3$. En déduire l'expression $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$, puis la valeur de f_3.
4. En écrivant que $e^{i(n+2)x} + e^{inx} = e^{i(n+1)x}(e^{ix} + e^{-ix})$, démontrer que l'on a $\cos((n+2)x) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx)$. En déduire comment calculer f_{n+2} en fonction de f_{n+1} et f_n.
5. Calculer f_4 et f_5.

Correction

1. *On trouve* $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$.
2. $\cos(2x) = \mathrm{Re}((e^{ix})^2) = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x)$. *Donc* $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$. *Donc on a* $f_2(x) = 2x^2 - 1$.
3. $(e^{ix})^3 = (2\cos^2(x) - 1 + 2i\cos(x)\sin(x))(\cos(x) + i\sin(x))$ *a pour partie réelle* $2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)\sin^2(x) = 2\cos^3(x) - \cos(x) - 2\cos(x)(1 - \cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$. *Donc* $f_3(x) = 4x^3 - 3x$.
4. *On a* $e^{i(n+2)x} + e^{inx} = e^{i(n+1)x}(e^{ix} + e^{-ix}) = 2\cos(x)e^{i(n+1)x}$. *En prenant la partie réelle on obtient* $\cos((n+2)x) + \cos(nx) = 2\cos(x)\cos((n+1)x)$ *: c'est ce qu'on voulait démontrer. On obtient donc*
$$f_{n+2}(x) = 2xf_{n+1}(x) - f_n(x)$$
5. *On a donc* $f_4 = 2xf_3 - f_2 = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ *et* $f_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Exercice 12 *Niveau expert*

On se place dans le plan muni d'un repère euclidien. Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts on note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.
On note $j = e^{2i\pi/3}$.

1. Donner la forme algébrique de j. Calculer j^2, j^3 et $1 + j + j^2$. Montrer que $-j^2 = e^{i\pi/3}$.
2. Si $a = 1$, $b = j$ et $c = j^2$, calculer l'affixe z du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'affixe z' du vecteur $\overrightarrow{AC}$. Vérifier que $e^{i\pi/3}z = z'$. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.[1]

1. On rappelle qu'un triangle ABC est équilatéral si l'une de ces trois propriétés est vraie :
- $AB = AC = BC$
- les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux à $\pi/3$ (au signe près)

3. On revient dans le cas général, où a, b, c n'ont pas de valeur fixée. On rappelle que le triangle ABC est dit *direct* si l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est entre 0 et π (modulo 2π), c'est-à-dire si l'argument de $\dfrac{a-c}{a-b}$ est entre 0 et π.
   (a) Quelle est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$? Du vecteur $\overrightarrow{AC}$? Comment interpréter géométriquement l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$?
   (b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2$.
   (c) Démontrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $c + ja + j^2 b = 0$, ou de manière équivalente $a + jb + j^2 c = 0$.
4. De la même manière, on peut démontrer que ABC est équilatéral indirect si et seulement si $a + j^2 b + jc = 0$. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si $(a + jb + j^2 c)(a + j^2 b + jc) = 0$.

Correction

1. $j = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. On a $j^2 = e^{4i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$ et $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$. $-j^2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$.

2. On a $z = j - 1$ et $z' = j^2 - 1$. On calcule $e^{i\pi/3} z = -j^2(j-1) = -j^3 + j^2 = -1 + j^2 = z'$. On a donc $|z| = |z'|$ et l'angle entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est égal à $\pi/3$. Donc ABC est équilatéral.

3. (a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $c - a$. L'argument de $\dfrac{a-c}{a-b}$ est l'angle entre ces deux vecteurs.
   (b) Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si on a $AB = AC$ et l'angle en A vaut $\pi/3$. On en déduit l'égalité cherchée.
   (c) On a donc ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{a-c}{a-b} = -j^2$. En développant on obtient $(c - a) = -j^2(b - a)$ qui est équivalent à $c + (-1 - j^2)a + j^2 b = 0$, et comme $-1 - j^2 = j$ on obtient la première égalité. En multipliant par j^2 on obtient la seconde.

4. ABC est équilatéral si et seulement si il est soit équilatéral direct, donc $(a + jb + j^2 c) = 0$, soit équilatéral indirect, donc $a + j^2 b + jc = 0$. Le produit de ces deux facteurs est nul si et seulement si l'une des deux possibilités se produit.

- $AB = AC$ et l'angle $\widehat{BAC}$ est égal à $\pi/3$ (au signe près).