Evaluation du 12 novembre 2024

1. On définit la fonction numérique de la variable réelle x :
$$\phi(x) = \frac{1}{x\ln(|x|)}\,.$$
(On rappelle que $|x|$ est définie par $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x < 0$.)
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ϕ.
   (b) Étudier la parité de ϕ.
2. On définit maintenant la fonction de la variable complexe z :
$$f(z) = \frac{1}{z\ln(|z|)}\,.$$
Ici $|z|$ représente le module de z.
   (a) Pour quels $z \in \mathbb{C}$ peut-on calculer $f(z)$?
   (b) Calculer le module et l'argument de $1+i$, puis calculer $\frac{1}{1+i}$.
   (c) Calculer $f(\frac{1+i}{2})$, sous forme algébrique ou exponentielle (au choix). Simplifier au maximum.

Correction

1. (a) La fonction ϕ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$: en effet, il faut que $x \neq 0$ pour que $\ln|x|$ soit défini, et il faut que $\ln|x| \neq 0$, donc $x \neq \pm 1$, pour qu'on puisse inverser.

(b) Si $\phi(x)$ est défini, alors $\phi(-x)$ aussi, et on a $\phi(-x) = -\phi(x)$. Donc ϕ est impaire.

2. On définit maintenant la fonction de la variable complexe z :
$$f(z) = \frac{1}{z\ln(|z|)}\,.$$

(a) La fonction f est définie sur $\mathbb{C}^*$ privé de l'ensemble des nombres complexes de module 1.

(b) On a $|1+i| = \sqrt{2}$ et l'argument est θ tel que $\cos(\theta) = \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$: on a donc $\theta = \pi/4$. Donc $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, et donc $\frac{1}{1+i} = e^{-i\pi/4}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(1-i)$ (qu'on peut aussi retrouver en calculant le conjugué).

(c) On calcule d'abord $|\frac{1+i}{2}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'après la question ci-dessus. Donc $\ln(\left|\frac{1+i}{2}\right|) = \ln(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\ln(2)$. Et finalement :

$f(\frac{1+i}{2}) = \frac{-1}{(1+i)\ln(2)} = \frac{2(-1+i)}{\ln(2)}$

On peut aussi partir de la forme exponentielle : si $z = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$ *on a*

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{e^{i\pi/4}\ln(\frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{-2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{\ln(2)}$$

En écrivant $e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$ *on retrouve le même résultat.*