Evaluation du 4 novembre 2024

Savoir faire

- SF79 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants : $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 + i$.
2. Pour $\omega, t \in \mathbb{R}$, calculer la partie réelle de $z_1 e^{i\omega t}$ et $z_2 e^{i\omega t}$, de deux manières différentes.
3. En déduire qu'il existe $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}^+$ et φ_1, φ_2 tels que

$$\cos(\omega t) - \sqrt{3}\sin(\omega t) = \rho_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

et

$$\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = \rho_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

4. Quelle est la période de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t)$?

Correction

1. $1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2e^{-i\pi/3}$ *et* $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2. On a $z_1 e^{i\omega t} = 2e^{-i\pi/3+\omega t}$ *qui a pour partie réelle* $2\cos(\omega t - i\pi/3)$ *; d'autre part* $z_1 e^{i\omega t} = (1 - i\sqrt{3})(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t) = \cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t) + i(\sin(\omega t) - \sqrt{3}\cos(\omega t))$. *Donc la partie réelle de* $z_1 e^{i\omega t}$ *est* $\cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t)$. *De la même manière on obtient* $\mathrm{Re}(z_2 e^{i\omega t}) = \cos(\omega t) - \sin(\omega t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$.

3. D'après les questions ci-dessus, on a donc

$$2\cos(\omega t) + \sqrt{3}\sin(\omega t) = 2\cos(\omega t - \pi/3)$$

et

$$\cos(\omega t) - \sin(\omega t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$$

4. Cette fonction a pour période $\frac{2\pi}{\omega}$ *: en effet, on a* $\rho\cos(\omega(t + 2\pi/\omega) + \varphi) = \cos(\omega(t + 2\pi + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$.