

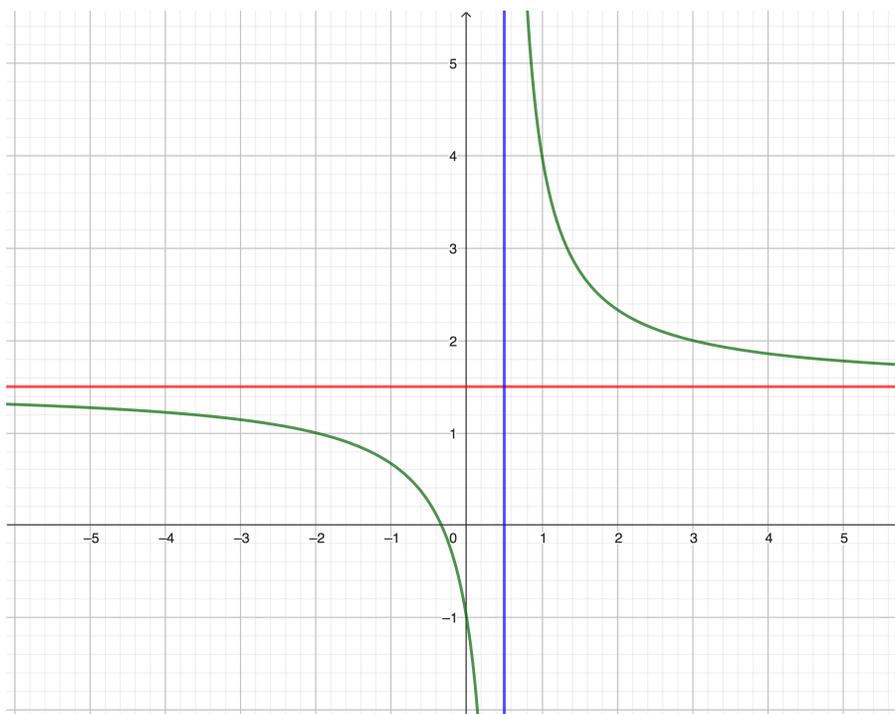
Evaluation du 23 septembre 2024

Savoir faire

- SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un
- SF3 Savoir trouver un ensemble image
- SF2 Savoir trouver graphiquement ou calculer un antécédent, une image
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, identités remarquables, fractions...)
- SF200 : Savoir faire des calculs algébriques avec des inégalités

Soit f la fonction qui à $x \neq \frac{1}{2}$ associe $\frac{3x+1}{2x-1}$.

1. Trouver un antécédent de 5 par f .
2. Calculer $f(x) - \frac{3}{2}$. En déduire que pour $x < \frac{1}{2}$ on a $f(x) < \frac{3}{2}$.
3. Sur le graphique suivant, on a représenté (en vert) le graphe fonction f , ainsi que (en rouge) la fonction constante égale à $\frac{3}{2}$ et (en bleu) la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. D'après le graphique, quel semble être l'ensemble image de f ? Et l'ensemble image $f(\frac{1}{2}, +\infty[)$?



Correction

1. On résout l'équation $f(x) = 5$: on a

$$\begin{aligned}f(x) &= 5 \\ \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2x-1} &= 5 \\ \Leftrightarrow 3x+1 &= 5(2x-1) \\ \Leftrightarrow 7x-6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

Donc $\frac{6}{7}$ est un antécédent de 5 par f .

2. On a $f(x) - \frac{3}{2} = \frac{3x+1}{2x-1} - \frac{3}{2} = \frac{2(3x+1) - 3(2x-1)}{2(2x-1)} = \frac{5}{2(2x-1)} = \frac{5}{2(2x-1)}$.
Si $x < \frac{1}{2}$ on a $2x < 1$ donc $2x-1 < 0$, et donc $\frac{5}{2(2x-1)} < 0$. Donc $f(x) - \frac{3}{2} < 0$,
donc $f(x) < \frac{3}{2}$.

3. L'ensemble image $f(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\})$ est égal à $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, et $f(]\frac{1}{2}, +\infty[) =]\frac{3}{2}, +\infty[$.