Evaluation du 14 octobre 2024

Durée : 1h30m (tiers-temps :2h)
Calculatrices et documents interdits

Exercice 1

Savoir faire

SF8 : Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre 1, ou d'ordre 2 type $x^2 = a$

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x - 1 = -3x + 4$
2. $\dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{3+5x}$
3. $x^2 = 4$

Exercice 2

Savoir faire

SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, identités remarquables, fractions…)

1. Simplifier au maximum l'expression suivante : $\dfrac{2x-1}{3-4x} - \dfrac{1+x}{2-x}$ (on développera le numérateur)
2. Factoriser $x^2 - 9 + 2(x+3)^2$.

Exercice 3

Savoir faire

SF10 : Savoir résoudre une équation du second degré

Résoudre les deux équations suivantes :

1. $-x^2 + 3x - 4 = 0$
2. $2x^2 - 3x + 4 = 0$

Exercice 4

Savoir faire

SF 1184 : Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs du plan

Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2,-1)$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(5,3)$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $2\vec{u}-3\vec{v}$ et $-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{v}$.

Exercice 5

Savoir faire

SF 1185 : Savoir représenter des vecteurs dans R2 à partir de leurs coordonnées

Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2,-1)$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées $(-1,1)$. Représenter sur un des graphiques les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}+\vec{v}$.

Exercice 6

Savoir faire

SF27 : Savoir trouver l'équation d'une droite à partir de deux points

Soient A,B et C les points définis par leurs coordonnées $A(2,3)$, $B(5,3)$ et $C(1,-1)$. Déterminer les équations des droites (AB) et (AC).

Exercice 7

Savoir faire

SF30 :Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation

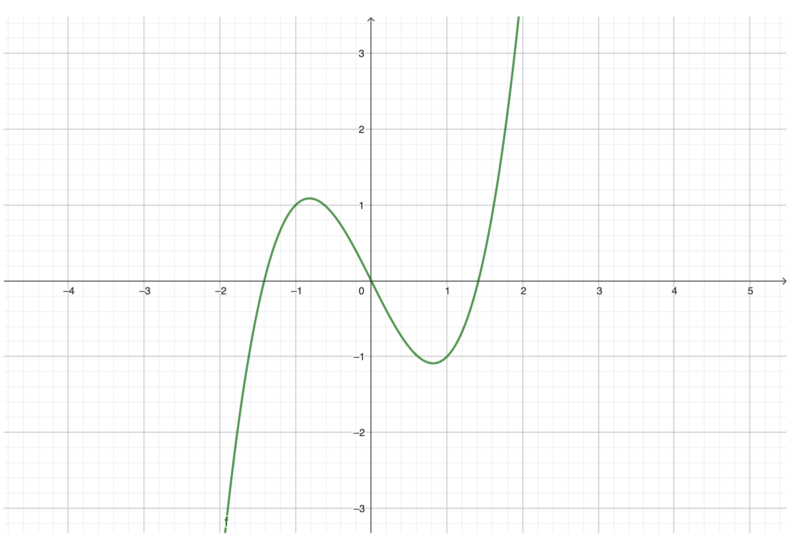
Sur un des graphiques fournis, dessiner les graphes des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto |x|$.

Exercice 8

Savoir faire

SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Sur le graphe ci-dessous on a tracé une fonction f :



Sur le même graphique, tracer les fonctions g et h définies par $g(x) = -f(x+1)$ et $h(x) = f(\frac{x}{2})$.

Exercice 9 *Niveau attendu*
Soit f la fonction qui à $x \neq 1$ associe $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$.

1. Sur un des graphes vide ci-dessous, tracer l'allure du graphe de f.
2. Calculer l'image $f(2)$, mais vérifier que 2 n'a pas d'antécédent par f.
3. Plus généralement, soit $y \in \mathbb{R}$ avec $y \neq 2$. Déterminer le(s) antécédent(s) de y par f.
4. D'après la question précédente, quel est l'ensemble image $f(\mathbb{R}\setminus\{1\})$? Cela vous paraît-il cohérent avec le graphe que vous avez tracé ?
5. En vous aidant du graphique (que vous avez tracé), quel semble être l'ensemble $f(]1, +\infty[)$? Le représenter en couleur.

Correction

1. *...*
2. $f(2) = \frac{1}{2-1} + 2 = 3$. *On cherche ensuite à résoudre* $f(x) = 2$ *: on obtient l'équation* $\frac{1}{x-1} + 2 = 2$*, soit* $\frac{1}{x-1} = 0$. *Cette équation n'a pas de solution, donc* 2 *n'a pas d'antécédent.*
3. *On cherche à résoudre l'équation* $\frac{1}{x-1} + 2 = y$. *C'est équivalent à* $\frac{1}{x-1} = y - 2$*, donc* $x - 1 = \frac{1}{y-2}$ *(puisque* $y \neq 2$*). Comme* $x \neq 1$ *par hypothèse c'est aussi équivalent à* $y - 2 = \frac{1}{x-1}$*, donc* $y = \frac{1}{x-1} + 2 = \frac{2x+3}{x-1}$.
4. *L'ensemble image est l'ensemble de tous les nombres qui ont un antécédent par* f. *Au vu de la question précédente c'est donc l'ensemble de tous les nombres* $\neq 2$ *:* $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. *C'est bien sûr cohérent avec le graphique.*
5. *Sur le graphique (si on l'a tracé correctement) on voit que* $f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$.

Exercice 10 *Niveau avancé*

1. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. Expliquer pourquoi on a
$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \qquad (*)$$
Quand a-t-on égalité ?
2. (a) En développant le produit scalaire $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, démontrer $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
   (b) Grâce à l'inégalité de la première question, en déduire *l'inégalité triangulaire* : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
3. En choisissant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de manière adéquate dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, démontrer avec l'inégalité de la première question que pour tous $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ on a
$$|xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

4. En déduire que pour tous a, b, c réels on a
   (a) $|a+b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$ et
   (b) $|a+b+c| \leq \sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
5. Quelle relation doivent vérifier a, b, c pour qu'on ait égalité dans les deux cas précédents ?
6. (Bonus, hors évaluation) Comment peut-on généraliser les inégalités ci-dessus ?

Correction

1. *On utilise la formule $u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cos(\theta)$, où θ est l'angle entre u et v. Comme $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ il vient $|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. On a égalité lorsque $|\cos(\theta)| = 1$, c'est-à-dire lorsque l'angle vaut 0 ou π (modulo 2π), c'est-à-dire lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*
2. (a) *On développe $(u+v) \cdot (u+v) = u \cdot u + v \cdot v + u \cdot v + v \cdot u$ et on a le résultat en utilisant que $u \cdot u = \|u\|^2$.*
   (b) *En utilisant (**??**) on a donc $u \cdot v \leq \|u\| \cdot \|v\|$. On obtient donc $\|u+v\|^2 \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$. En prenant la racine des deux côtés (c'est possible puisque les deux termes sont positifs) on obtient le résultat voulu.*
3. *Si on prend $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ dans l'équation (**??**) on a le résultat de manière immédiate.*
4. (a) *Pour $u = (a, b)$ et $v = (1, 1)$ on a $u \cdot v = a + b$ et $\|v\| = \sqrt{2}$, puis $\|u\| = \sqrt{a^2+b^2}$. Donc on a bien $|a+b| \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$.*
   (b) *On prend $u = (a, b, c)$ et $v = (1, 1, 1)$. On a $\|u\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et $\|v\| = \sqrt{3}$. L'inégalité de la première question donne le résultat.*
5. *Dans les deux cas on a égalité lorsque le cosinus de l'angle θ entre u et v vaut 1 ou -1, c'est-à-dire que $\theta = 0$ ou π. Ceci veut dire que les deux vecteurs sont colinéaires, c'est-à-dire que $a = b$ dans le premier cas, et $a = b = c$ dans le deuxième.*

Exercice 11 *Niveau expert*
On se place dans le plan euclidien, d'origine O.

1. (a) Soit D une droite passant par O de vecteur directeur $\vec{u}$, qu'on suppose de norme 1. Comment peut-on calculer le projeté orthogonal d'un vecteur $\vec{v}$ sur D ?
   (b) On note s la symétrie par rapport à D. Justifer (à l'aide d'un dessin) la formule
   $$s(\vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} - \vec{v}$$
   (c) Si D est la droite d'équation $y = x$, et $\vec{v}$ est le vecteur de coordonnées (x, y), quelles sont les coordonnées du vecteur $s(\vec{v})$? On justifiera soigneusement, en utilisant la formule ci-dessus.
2. Soit $f : I \to J$ une fonction, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. On dit que f est *bijective* si tout élément $y \in J$ admet un antécédent unique $x \in I$.

(a) Montrer que $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2$ n'est pas bijective, mais que $f_2 :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = \dfrac{x}{x-1}$ est bijective.

(b) Si f est bijective, on note f^{-1} la fonction qui à $y \in J$ associe l'unique x tel que $f(x) = y$: c'est la *réciproque* de f. Quelle est la réciproque de f_2 ?

(c) On rappelle que le graphe de f est l'ensemble Γ des points de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in I$. Démontrer, en utilisant les questions précédentes, que le graphe de f^{-1} est $s(\Gamma)$, où s est la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Correction

1. (a) *On sait que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est la norme du projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur D, avec signe positif s'il est dans le même sens que $\vec{u}$. Donc le projeté orthgonal de $\vec{v}$ sur D est donné par la formule $p(\vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u}$.*

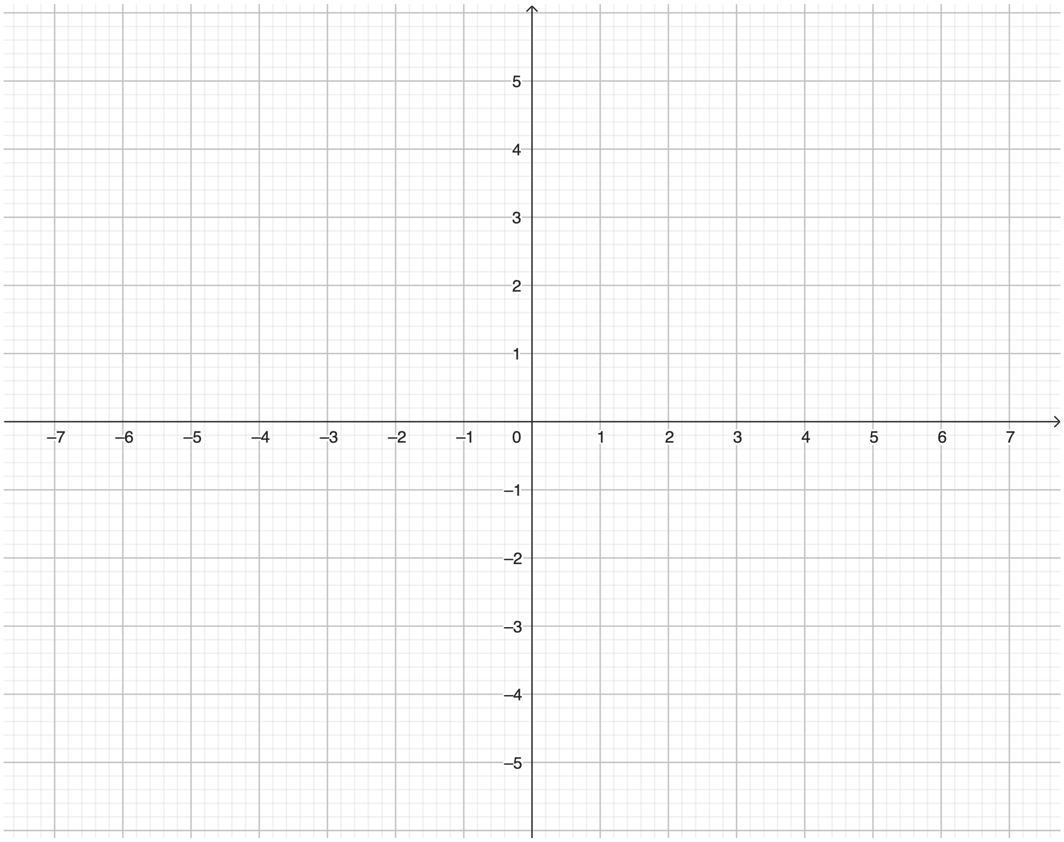
   (b) *Soit $\vec{w}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur D. Sur le dessin, on voit que le symétrique de $\vec{v}$ s'obtient en faisant $\vec{v} - 2(\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} - \vec{v}$. Avec la formule ci-dessus, on obtient la formule souhaitée.*

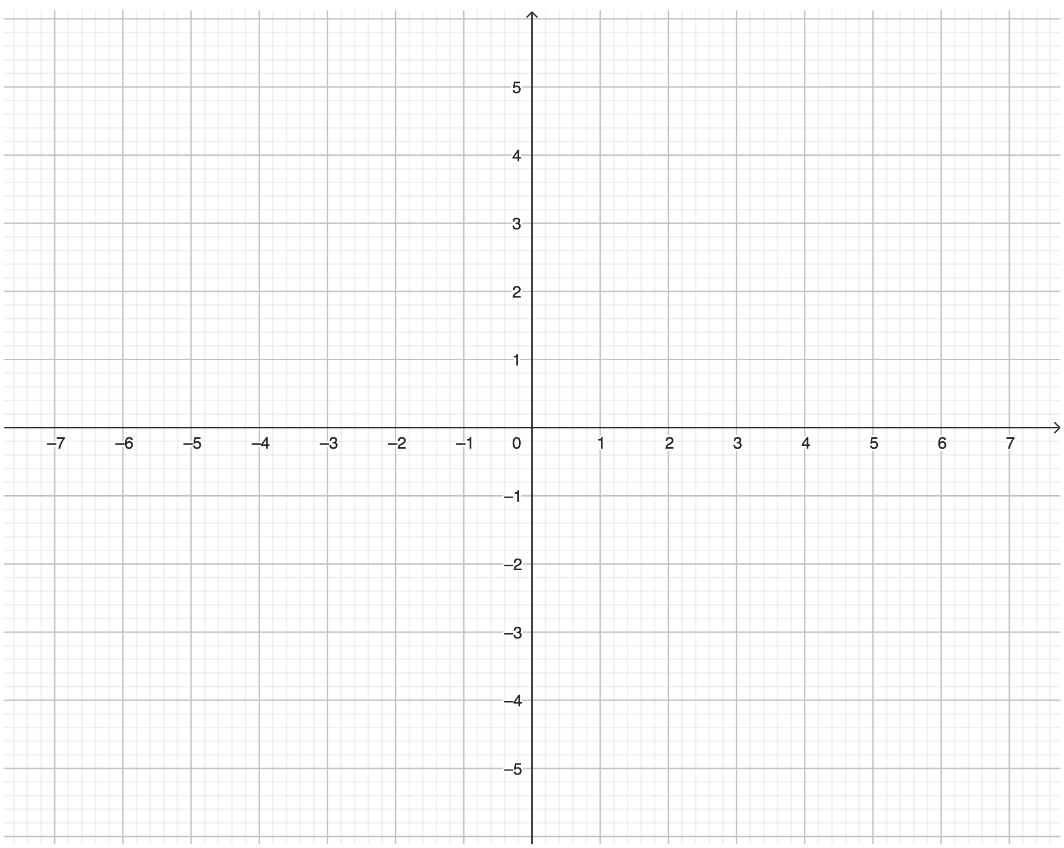
   (c) *On applique la formule précédente : on prend $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ un vecteur unitaire. On obtient $(u \cdot v)u = \dfrac{1}{2}(x+y)(1,1)$ et donc $s(v) = 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} - \vec{v} = (x+y-x, x+y-y) = (y,x)$.*

2. (a) *f_1 n'est pas bijective parce que 1 a deux antécédents. f_2 est bijective parce que tout réel $y > 1$ s'écrit s'écrit $f_2(x)$ avec (en résolvant une petite équation) $x = \dfrac{y}{y-1}$. Si $y > 1$ on a bien $x - 1 = \dfrac{1}{y-1} > 0$, donc $x > 1$.*

   (b) *La réciproque de f_2 est la fonction $x \mapsto \dfrac{y}{y-1}$.*

   (c) *Le graphe de f est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$. Le graphe de f^{-1} est donc l'ensemble des points $(y, f^{-1}(y))$, c'est-à-dire les points $(f(x), x)$, où $x \in I$. Vu la formule obtenue à la question ci-dessus, c'est donc l'ensemble des points $s(A)$ avec A appartenant au graphe de f.*


–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 –1 –2 –3 –4 –5


–7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7
5 4 3 2 1 –1 –2 –3 –4 –5