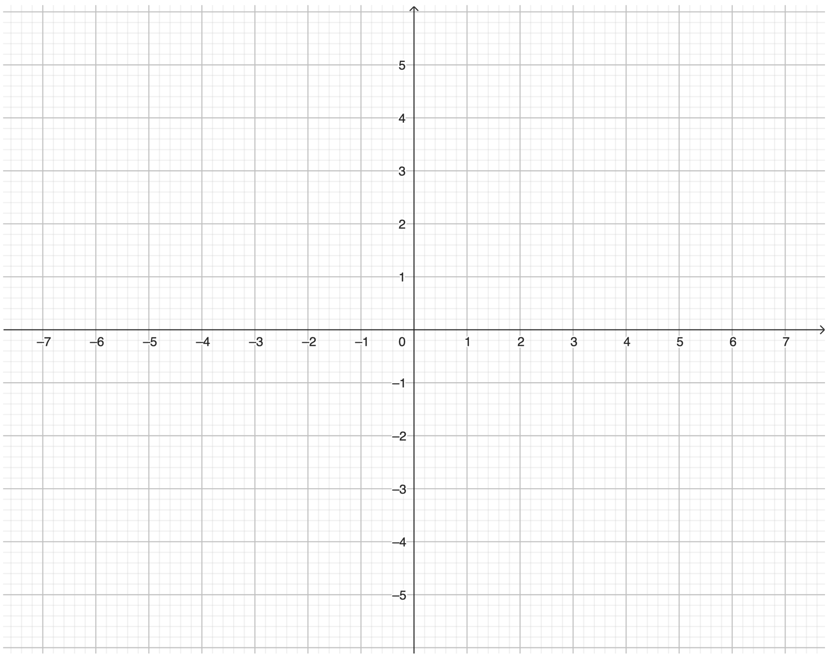
Evaluation du 7 octobre 2024

Savoir faire

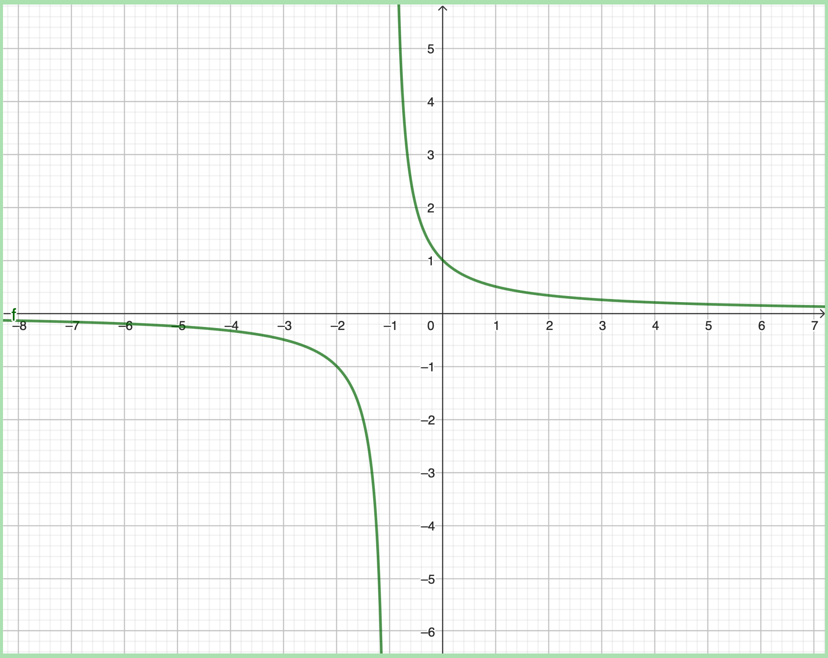
- SF1205 : Savoir calculer un produit scalaire
- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, identités remarquables, fractions...)

Soit f la fonction qui à $x \neq -1$ associe $\dfrac{1}{x+1}$.

1. Sur la grille ci-dessous (ou sur une feuille libre), dessinez l'allure du graphe de f.
2. On note A le point du graphe de f d'abscisse 1, et B le point d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$.
   (a) Calculer les coordonnées des points A et B, et l'équation de la droite (AB), ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   (b) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on note C le point de coordonnées $(x, f(x))$. Calculer (en fonction de x) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Simplifier au maximum.
   (d) Pour quelle(s) valeur(s) de x les droites (AB) et (AC) sont-elles perpendiculaires ?



Correction

1. 

2. (a) *On a* $A(1, \frac{1}{2})$, $B(-\frac{1}{2}, 2)$ *(en calculant* $\frac{1}{-1/2+1} = \frac{1}{1/2} = 2$*). Le vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *a pour coordonnées* $(-\frac{1}{2} - 1, 2 - \frac{1}{2}) = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

   (b) $\overrightarrow{AC}$ *a pour coordonnées* $(x-1, \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}) = (x-1, \frac{1-x}{2(x+1)})$.

   (c) *Pour la suite il va être utile de simplifier l'expression :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= -\frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2}(\frac{1-x}{2(x+1)}) \\ &= -\frac{3}{2}(1 - x + \frac{1-x}{2(x+1)}\end{aligned}$$

   (d) *Les droites* (AB) *et* (AC) *sont perpendiculaires lorsque les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont orthogonaux, donc lorsque leur produit scalaire est nul. On doit donc résoudre l'équation* $1 - x + \frac{1-x}{2(x+1)} = 0$*. Le plus simple est de factoriser par* $x - 1$ *: l'équation est équivalente à* $(1-x)(1 + \frac{1}{2(x+1)}) = 0$*. Comme on a supposé* $x \neq 1$ *on peut diviser par* $x - 1$ *et on a donc* $1 + \frac{1}{2(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 2(x+1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.
   (Si on ne voit pas la factorisation, on réduit au même dénominateur et on développe : le numérateur va être $2(1-x)(1+x) + (1-x) = 2 - 2x^2 + 1 - x$ *et donc on doit résoudre l'équation* $-2x^2 - x + 3 = 0$*. Le discriminant est* $\Delta = 1 + 4 \times 2 \times 3 = 25 = 5^2$ *et on retrouve* $x = \frac{1+5}{-4} = -\frac{3}{2}$ *ou* $x = \frac{1-5}{-4} = 1$.