Evaluation du 30 septembre 2024

Savoir faire

- Savoir résoudre des équations algébriques d'ordre un, ou d'ordre deux de type $x^2 = a$
- Savoir résoudre des inéquations simples
- Savoir faire des combinaisons linéaires de vecteurs du plan
- Savoir représenter des vecteurs dans R2 à partir de leurs coordonnées
- Savoir calculer le produit scalaire

Soit u le vecteur de coordonnées $(1, -1)$ et v le vecteur de coordonnées $(-3, 2)$.

1. Sur le graphique ci-dessous (ou sur une feuille libre), représenter les vecteurs u et v.
2. Pour $x \neq 0$, on note $w(x) = xu + \frac{1}{x}v$. Calculer $w(1)$ et $w(-1)$, les représenter sur le même graphique.
3. Calculer le produit scalaire $w(x) \cdot u$. Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $w(x)$ orthogonal à u ?
4. On note $\theta(x)$ l'angle non orienté entre $w(x)$ et u (il est donc entre 0 et π).
   (a) Résoudre l'inéquation $2x - \frac{1}{x} > 0$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $\theta(x) < \pi/2$?

Correction

1.

2. $w(1) = (1, -1) + (-3, 2) = (-2, 1)$. $w(-1) = (-1, 1) + (3, -2) = (2, -1)$.

3. On a $w(x) = (x - \frac{3}{x}, -x + \frac{2}{x})$. *Donc* $w(x) \cdot u = (x - \frac{3}{x}) - (-x + \frac{2}{x}) = 2x - \frac{5}{x} = \frac{2x^2 - 5}{x}$.

4. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $w(x) \cdot u = 0$, *c'est-à-dire si* $2x^2 = 5$, *donc* $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

5. (a) Soit $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *On a* $2x^2 - 1 = 2(x - x_1)(x - x_2)$ *donc* $2x^2 - 1 > 0$ *si et seulement si* $x > x_2$ *ou* $x < x_1$.

A partir de l'inéquation, si $x > 0$ *on multiplie par* x *et on obtient* $2x^2 - 1 > 0$, *et donc on a les solutions* $x > x_2$ *(puisque* $x < x_1$ *est incompatible avec* $x > 0$*). De l'autre côté, si* $x < 0$ *on doit résoudre* $2x^2 - 1 < 0$, *et on obtient cette fois les solutions* $x_1 < x < 0$.

Au final l'ensemble des solutions est $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$.

(b) On a $\theta(x) < \pi/2$ *dès que* $\cos(\theta(x)) > 0$, *c'est-à-dire* $w(x) \cdot u > 0$. *On doit donc trouver les* x *tels que* $w(x) \cdot u > 0$. *Ici il y avait une erreur d'énoncé :*

on aurait dû retrouver l'inéquation d'avant. En fait on obtient l'inéquation $2x - \frac{5}{x} > 0$. *Il faut refaire l'argument mais de la même manière on trouve* $]-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, 0[\cup]\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, +\infty[$