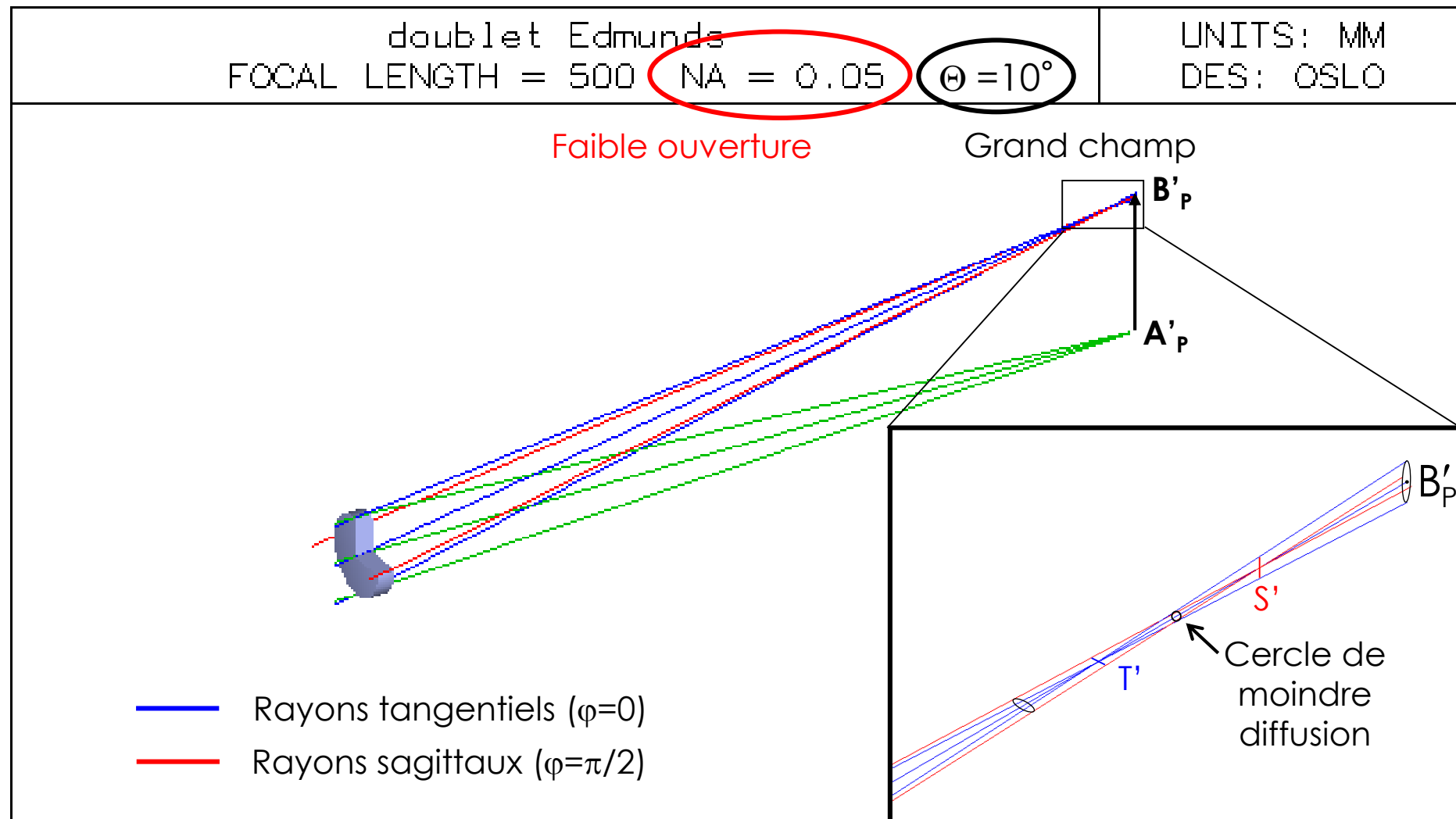


Chapitre 5

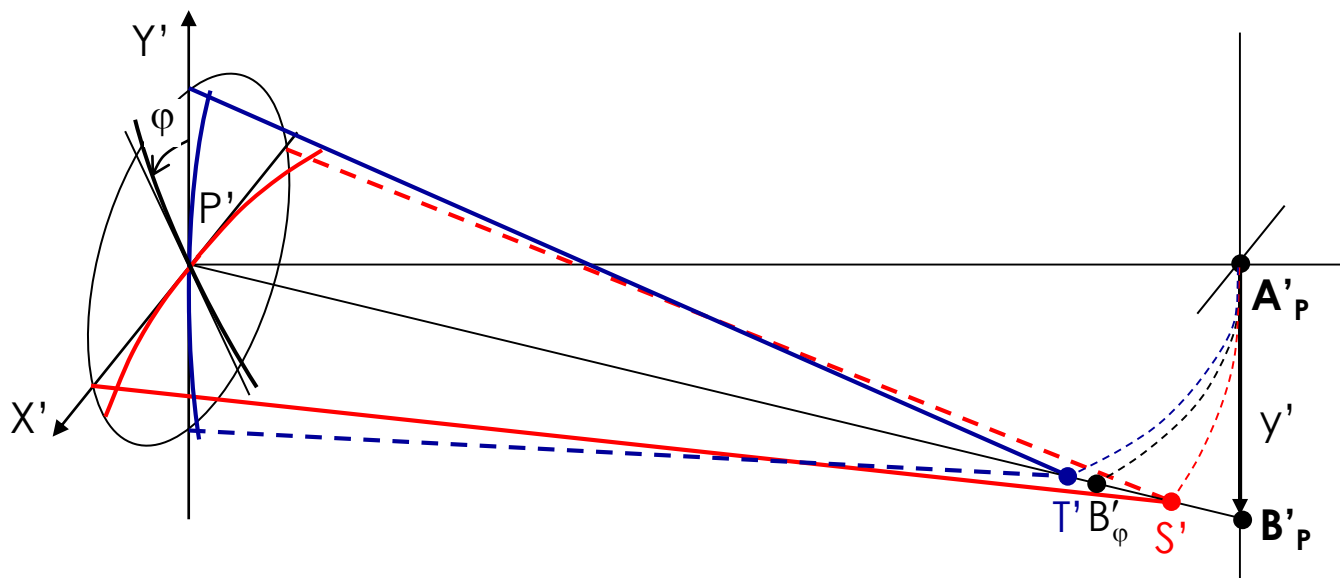
L'astigmatisme & la courbure de champ



Ecart normal : $\Delta(y', \alpha', \varphi) \propto \begin{cases} \alpha'^2 y'^{2q+2} \cos 2\varphi & (q \geq 0) \\ \alpha'^2 y'^{2q} & (q \geq 1) \end{cases}$

par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

Astigmatisme
Courbure de champ



Courbure d'une méridienne du
front d'onde, d'angle φ

$$C_{\varphi} = C_Y \cos^2 \varphi + C_X \sin^2 \varphi$$

Front d'onde : $z = f(X, Y)$ f : fonction deux fois dérivable en $(X, Y) = (0, 0)$
avec $\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=Y=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{X=Y=0} = 0$

Courbure C_φ ?

$$C_\varphi = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 h} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 Y} \left(\frac{\partial Y}{\partial h}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \frac{\partial X}{\partial h} \frac{\partial Y}{\partial h} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 X} \left(\frac{\partial X}{\partial h}\right)^2$$

Or $Y = h \cos \varphi$ et $X = h \sin \varphi$

$$C_\varphi = C_Y (\cos \varphi)^2 + 2C_{XY} \cos \varphi \sin \varphi + C_X (\sin \varphi)^2$$

Or $C_\varphi = C_{-\varphi}$ par symétrie du système , donc $C_{XY} = 0$.

$$\text{Donc } C_\varphi = C_Y (\cos \varphi)^2 + C_X (\sin \varphi)^2$$

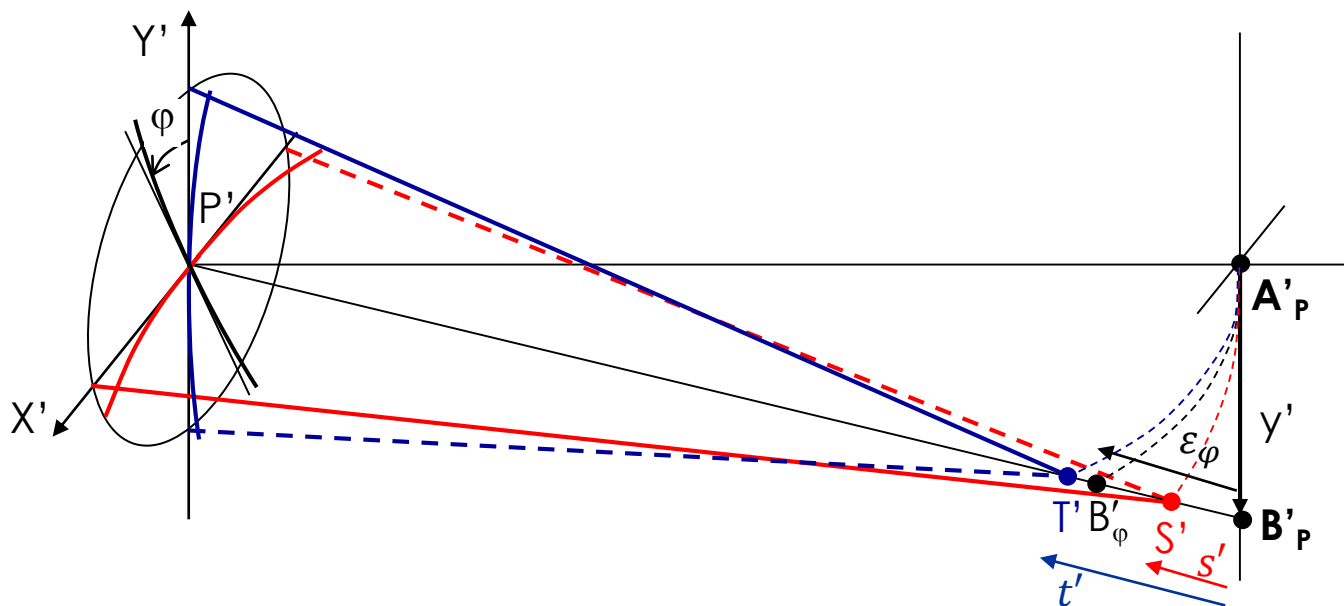
C_Y est atteinte pour $\varphi = 0$ (plan tangentiel)

C_X est atteinte pour $\varphi = \pi/2$ (plan sagittal)

Ecart normal : $\Delta(y', \alpha', \varphi) \propto \begin{cases} \alpha'^2 y'^{2q+2} \cos 2\varphi & (q \geq 0) \\ \alpha'^2 y'^{2q} & (q \geq 1) \end{cases}$

par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

Astigmatisme
Courbure de champ



Courbure d'une méridienne du front d'onde, d'angle φ

$$C_\varphi = C_Y \cos^2 \varphi + C_X \sin^2 \varphi$$

Courbures des surfaces focales : C'_T (tangentielle) et C'_S (sagittale)

Courbure de champ : $C' = (C'_S + C'_T) / 2$ || Astigmatisme : $A' = (C'_S - C'_T) / 2$

Ecart normal
par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T \cos^2 \varphi + C'_S \sin^2 \varphi)$$

Preuve : $\Delta = -\frac{1}{2} \varepsilon_\varphi \alpha'^2$

Cas particuliers : $\varphi = 0, t' = C'_T \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} t' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} t' \frac{Y'^2}{P'^2 T'^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, s' = C'_S \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} s' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} s' \frac{X'^2}{P'^2 S'^2}$

Cas général : $\Delta = \frac{h^2}{2} (C_\varphi - C_p)$, où C_p est la courbure de S_P .

$$\Delta = \frac{h^2}{2} (C_Y (\cos \varphi)^2 + C_X (\sin \varphi)^2 - C_p (\cos \varphi)^2 - C_p (\sin \varphi)^2)$$

Ecart normal

par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T \cos^2 \varphi + C'_S \sin^2 \varphi)$$

Preuve : $\Delta = -\frac{1}{2} \varepsilon_\varphi \alpha'^2$

Cas particuliers : $\varphi = 0, t' = C'_T \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} t' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} t' \frac{Y'^2}{P'^2 T'^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, s' = C'_S \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} s' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} s' \frac{X'^2}{P'^2 S'^2}$

Cas général : $\Delta = \frac{h^2}{2} (C_\varphi - C_p)$, où C_p est la courbure de S_P .

$$\Delta = \frac{h^2}{2} \left((C_Y - C_p) (\cos \varphi)^2 + (C_X - C_p) (\sin \varphi)^2 \right)$$

Par identification : $(C_Y - C_p) = -\frac{t'}{P'^2 T'^2}$ et $(C_X - C_p) = -\frac{s'}{P'^2 S'^2}$

Ecart normal
par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T \cos^2 \varphi + C'_S \sin^2 \varphi)$$

Preuve : $\Delta = -\frac{1}{2} \varepsilon_\varphi \alpha'^2$

Cas particuliers : $\varphi = 0, t' = C'_T \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} t' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} t' \frac{Y'^2}{P'T'^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, s' = C'_S \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} s' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} s' \frac{X'^2}{P'S'^2}$

Cas général : $\Delta = \frac{h^2}{2} (C_\varphi - C_p)$, où C_p est la courbure de S_P .

$$\Delta = \frac{h^2}{2} \left(-\frac{t'}{P'T'^2} (\cos \varphi)^2 - \frac{s'}{P'S'^2} (\sin \varphi)^2 \right)$$

Ecart normal

par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T \cos^2 \varphi + C'_S \sin^2 \varphi)$$

Preuve : $\Delta = -\frac{1}{2} \varepsilon_\varphi \alpha'^2$

Cas particuliers : $\varphi = 0, t' = C'_T \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} t' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} t' \frac{Y'^2}{P'T'^2}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}, s' = C'_S \frac{y'^2}{2}, \Delta = -\frac{1}{2} s' \alpha'^2 = -\frac{1}{2} s' \frac{X'^2}{P'S'^2}$

Cas général : $\Delta = \frac{h^2}{2} (C_\varphi - C_p)$, où C_p est la courbure de S_P .

$$\Delta = \frac{h^2}{2} \left(-\frac{t'}{P'T'^2} (\cos \varphi)^2 - \frac{s'}{P'S'^2} (\sin \varphi)^2 \right)$$

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T (\cos \varphi)^2 + C'_S (\sin \varphi)^2)$$

Ecart normal

par rapport à la sphère S_p
centrée en B'_p

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C'_T \cos^2 \varphi + C'_S \sin^2 \varphi)$$

$$\Delta = -\frac{y'^2 \alpha'^2}{4} (C' - A' \cos 2\varphi)$$

Courbure
de champ

$$C' = (C'_S + C'_T) / 2$$

Courbure
d'astigmatisme

$$A' = (C'_S - C'_T) / 2$$

Courbure de champ pure :

Position du meilleur foyer :

*cercle de moindre diffusion
dans le plan paraxial
diamètre = $C' y'^2 \alpha'$*

$$C' = C'_S = C'_T \neq 0$$

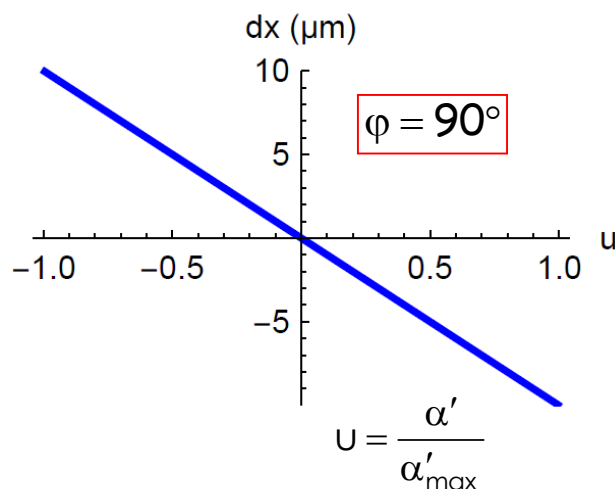
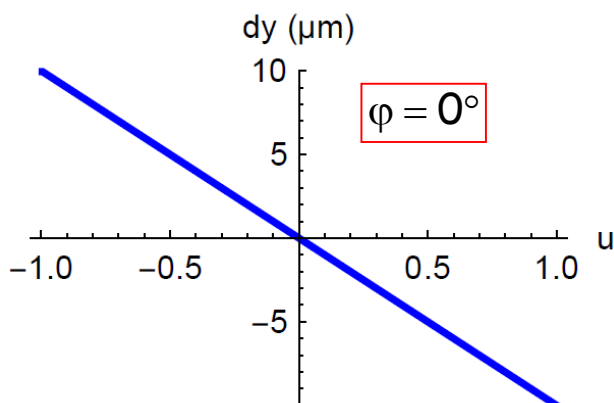
$$s' = t' = C' \frac{y'^2}{2}$$

$$\begin{cases} dy' = -s' \alpha' \cos \varphi \\ dx' = -s' \alpha' \sin \varphi \end{cases}$$

au 3^e ordre

Les surfaces images tangentielles et sagittales sont confondues, et courbées; leur courbure est C'

→ defocus $\propto y'^2$

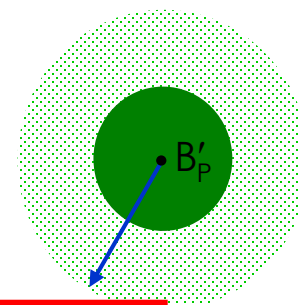


$\alpha'_{\max}$

$\alpha'_{\max} / 2$

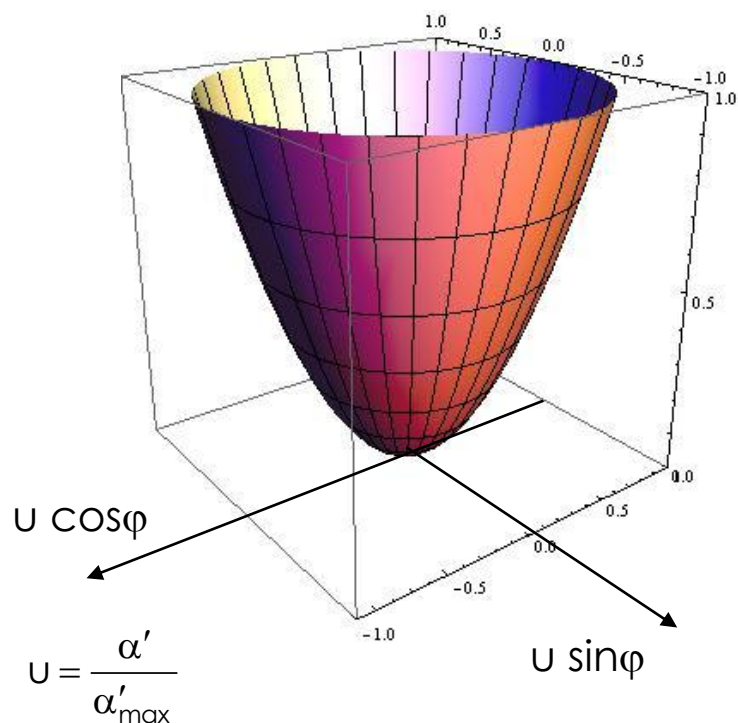
notation OSLO

$$\text{CRV3} = \left| C' \frac{y'^2}{2} \alpha'_{\max} \right|$$



Courbure de champ pure :

Position du meilleur foyer :



$$C' = C'_S = C'_T \neq 0$$

$$s' = t' = C' \frac{y'^2}{2} \rightarrow \text{defocus} \propto y'^2$$

$$\begin{cases} dy' = -s' \alpha' \cos \varphi \\ dx' = -s' \alpha' \sin \varphi \end{cases} \quad \text{dans le plan paraxial}$$

$$\Delta = -\frac{1}{2} s' \alpha'^2 = -C' \frac{y'^2 \alpha'^2}{4} / S_P$$

au 3^e ordre

Astigmatisme pur :

$$A' = C'_S = -C'_T \neq 0$$

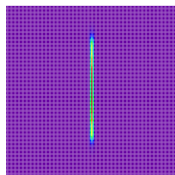
$$s' = A' \frac{y'^2}{2}; \quad t' = -A' \frac{y'^2}{2}$$

Les surfaces images tangentielles et sagittales sont courbées, et de courbures opposées; leur demi-différence est A'

→ *defocus variant en y'^2
et $\cos 2\varphi$*

Astigmatisme pur :

focale sagittale
longueur : $2A'y'^2\alpha'$

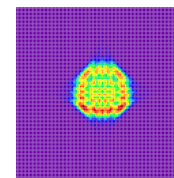
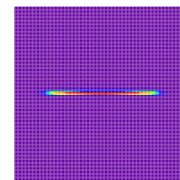


$$A' = C'_S = -C'_T \neq 0$$

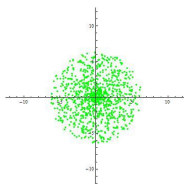
$$s' = A' \frac{y'^2}{2}; \quad t' = -A' \frac{y'^2}{2}$$

$$\begin{cases} dy' = A' \frac{y'^2}{2} \alpha' \cos \varphi \\ dx' = -A' \frac{y'^2}{2} \alpha' \sin \varphi \end{cases}$$

focale
tangentielle
longueur :
 $2A'y'^2\alpha'$

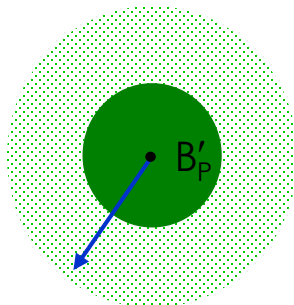


cercle de moindre diffusion
dans le plan paraxial
diamètre = $A'y'^2\alpha'$



$$\alpha'_{\max}$$

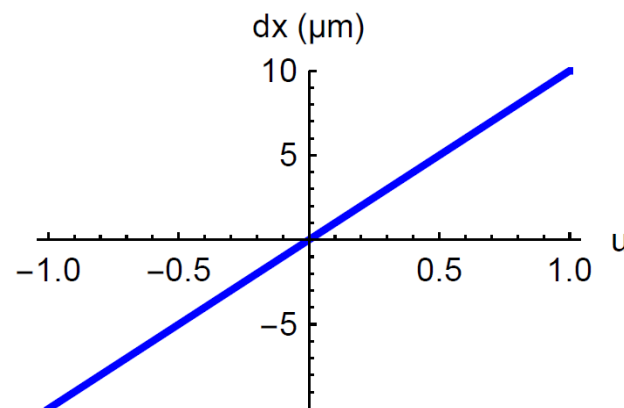
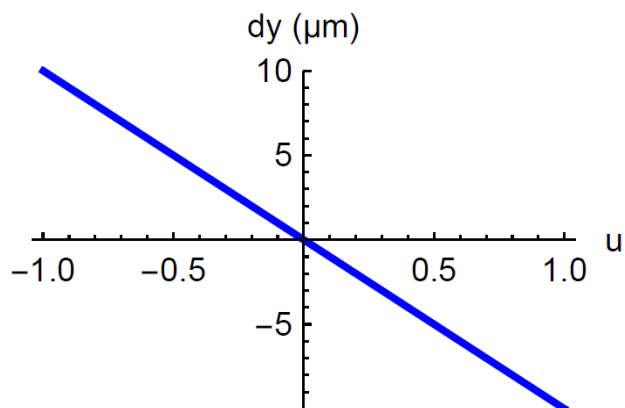
$$\alpha'_{\max} / 2$$



notation OSLO

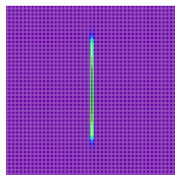
$$AST3 = \left| A' \frac{y'^2}{2} \alpha'_{\max} \right|$$

au 3^e ordre



Astigmatisme pur :

focale sagittale
longueur : $2A'y'^2\alpha'$



$$A' = C'_S = -C'_T \neq 0$$

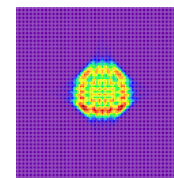
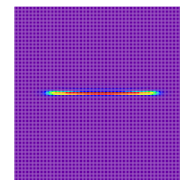
$$s' = A' \frac{y'^2}{2}; \quad t' = -A' \frac{y'^2}{2}$$

$$\begin{cases} dy' = A' \frac{y'^2}{2} \alpha' \cos \varphi \\ dx' = -A' \frac{y'^2}{2} \alpha' \sin \varphi \end{cases}$$

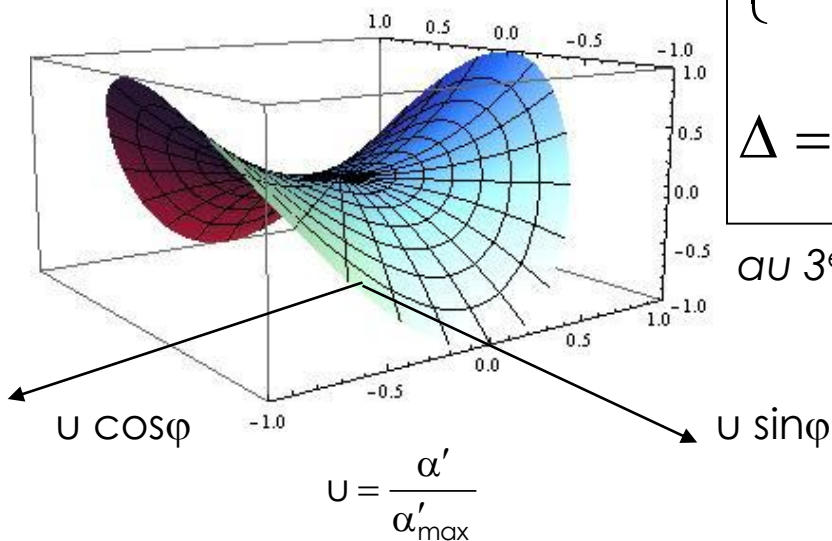
$$\Delta = A' \frac{y'^2 \alpha'^2}{4} \cos 2\varphi \quad / S_P$$

au 3^e ordre

focale
tangentielle
longueur :
 $2A'y'^2\alpha'$



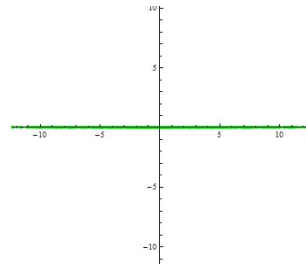
→ defocus variant en y'^2
et $\cos 2\varphi$



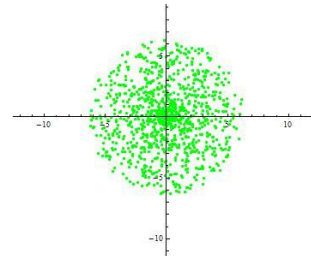
Astigmatisme : déformation du front d'onde

Spot diagramme

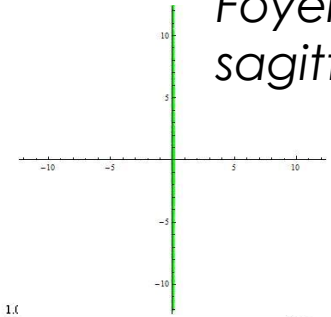
Foyer tangentiel



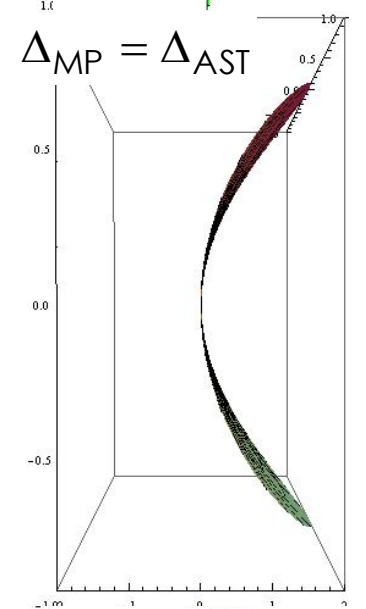
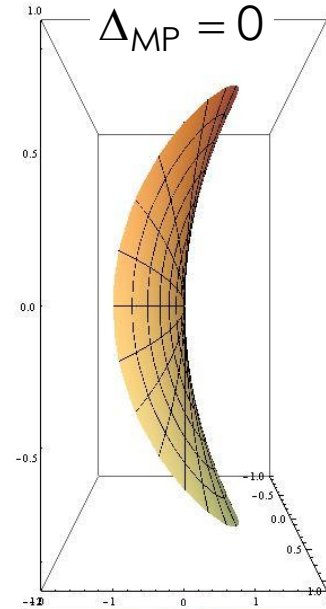
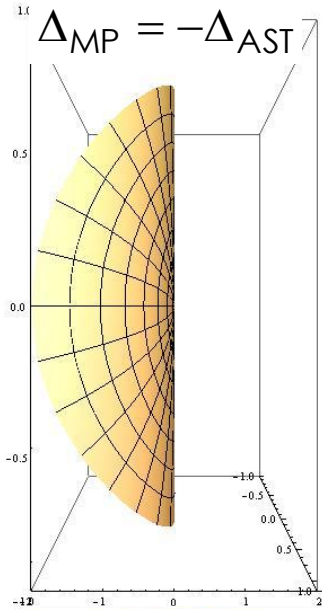
Meilleur foyer



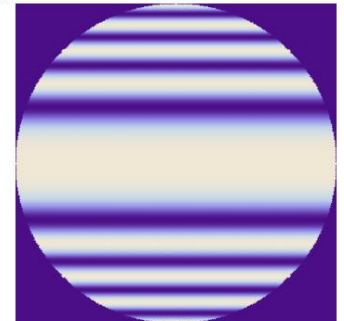
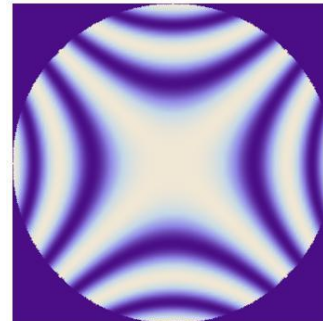
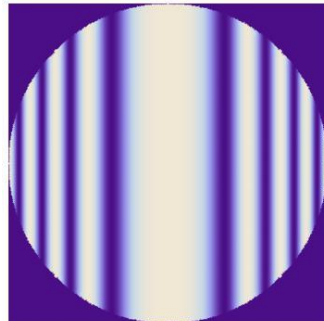
Foyer sagittal



$$\Delta_1 = \begin{cases} \Delta_{AST} u^2 \cos 2\varphi \\ + \Delta_{MP} u^2 \end{cases}$$

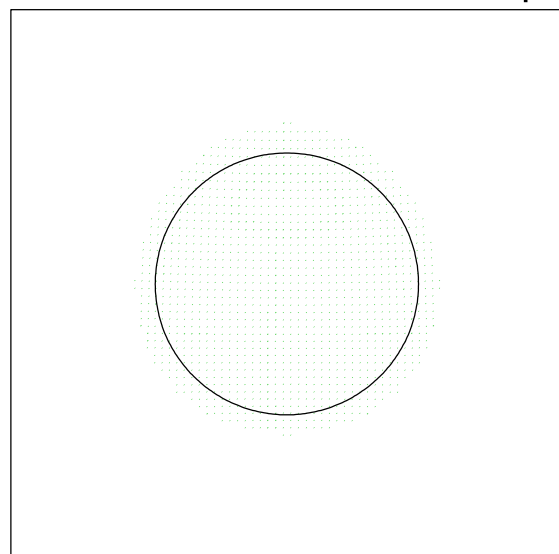


interférogramme

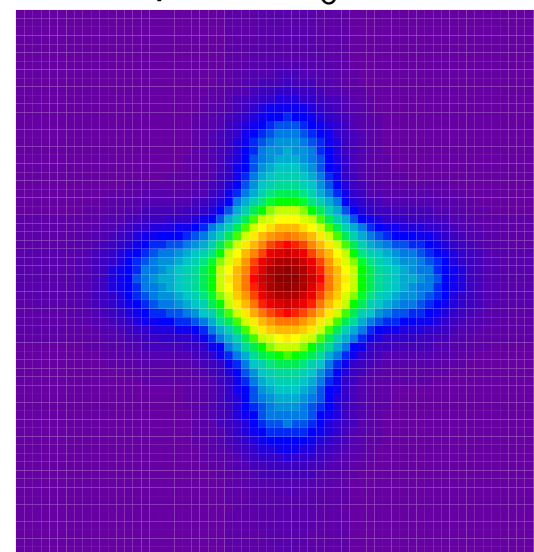


Exemple : doublet Edmunds $f'=500\text{mm}$, $\text{ON}=0.025$, $\theta = 3^\circ$

Mise au point au meilleur foyer $R_s^* = 0.43$



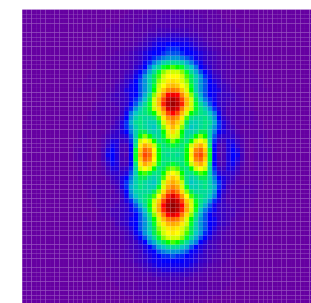
$60\mu\text{m}$



$R_{\text{airy}} = 14\mu\text{m}$

Cercle de
moindre $\rightarrow$ rayon $= 17\mu\text{m}$
diffusion

Image
paraxiale
 $R_s = 0.03$



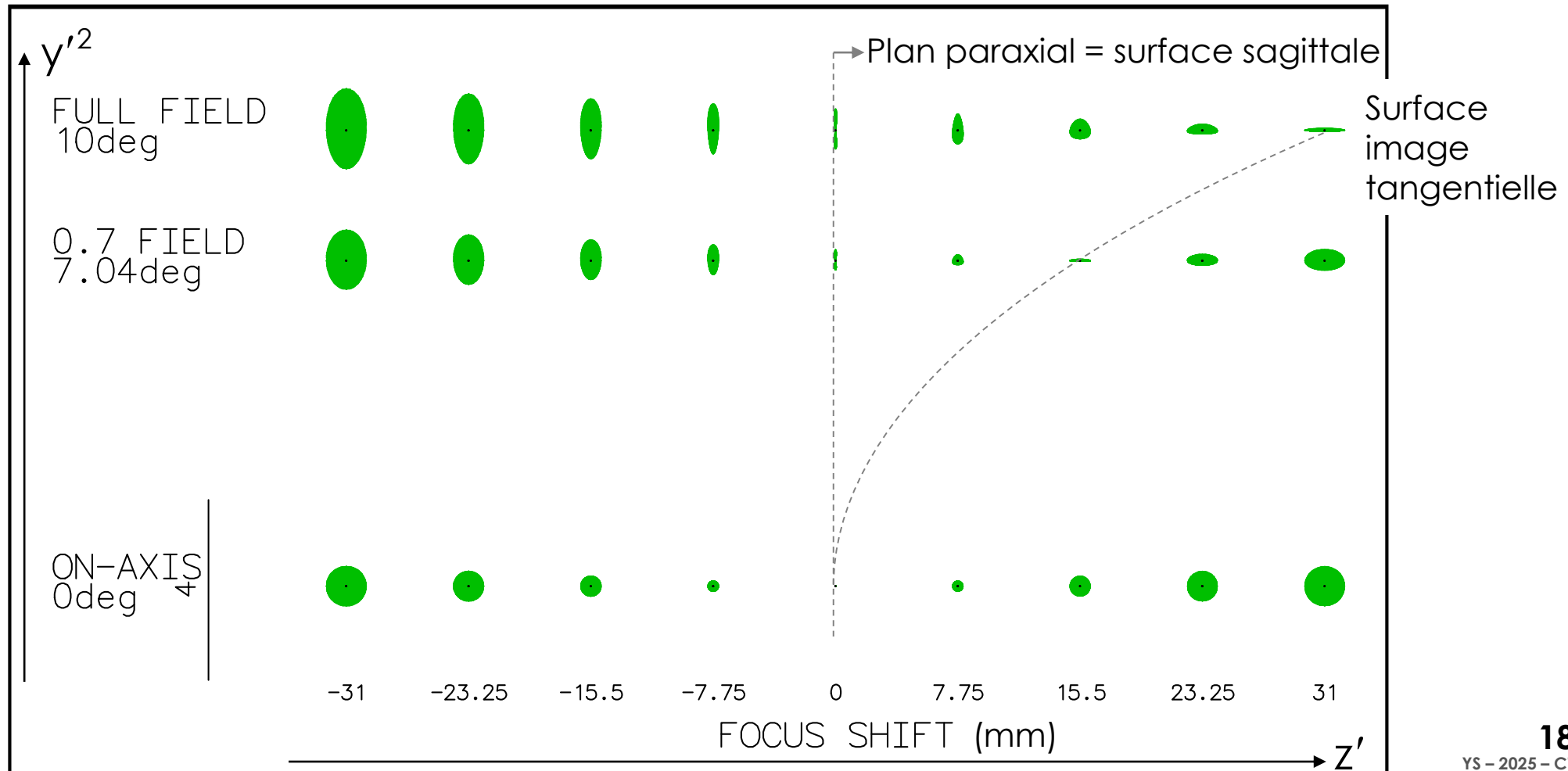
$140\mu\text{m}$

Astigm. & Courbure de champ 3^e du Miroir sphérique $\infty \rightarrow F'$

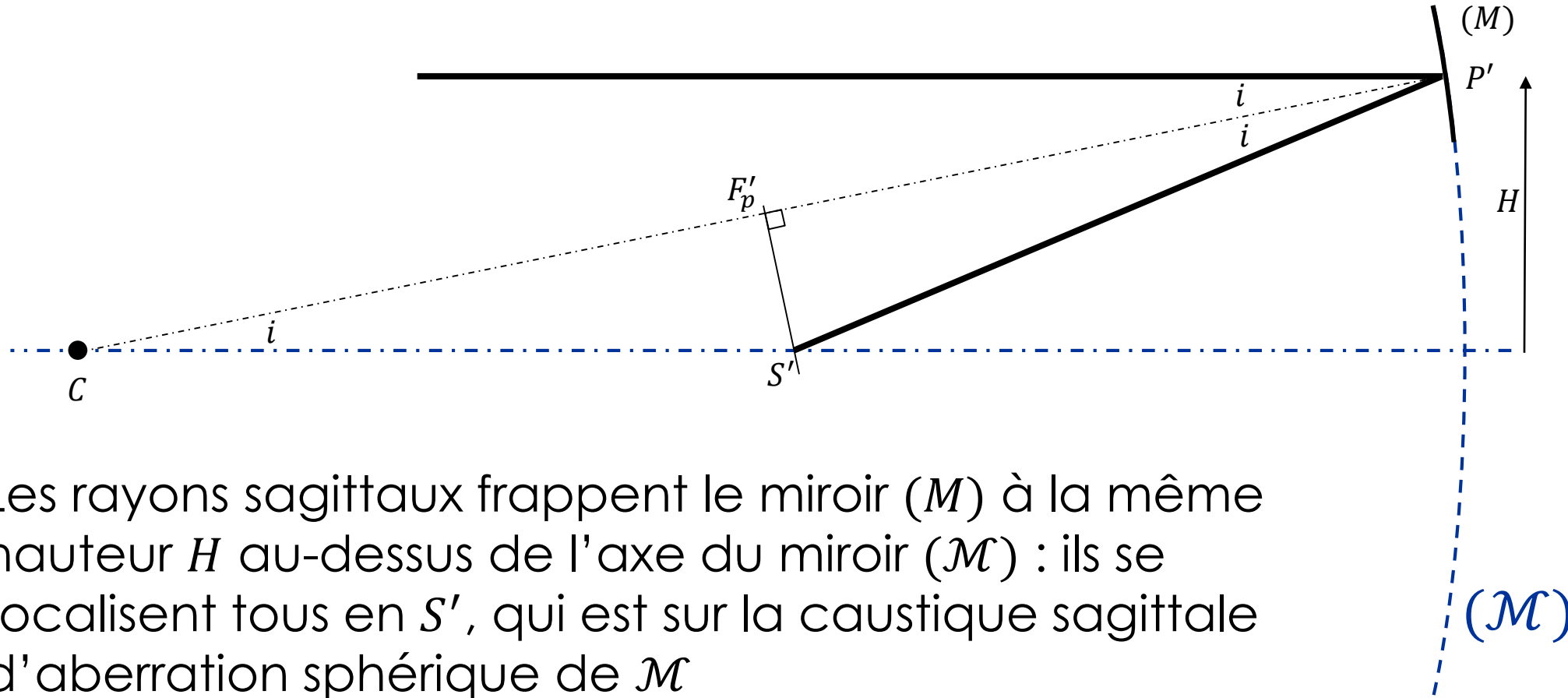
Lorsque le miroir porte la pupille :

$$C'_S = 0 ; \quad C'_T = -4/R$$

Exemple : $F'=1\text{m}$, $\Theta=10^\circ$, ouvert à $F/20$

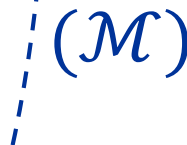


Courbure sagittale du miroir sphérique $\infty \rightarrow F'$



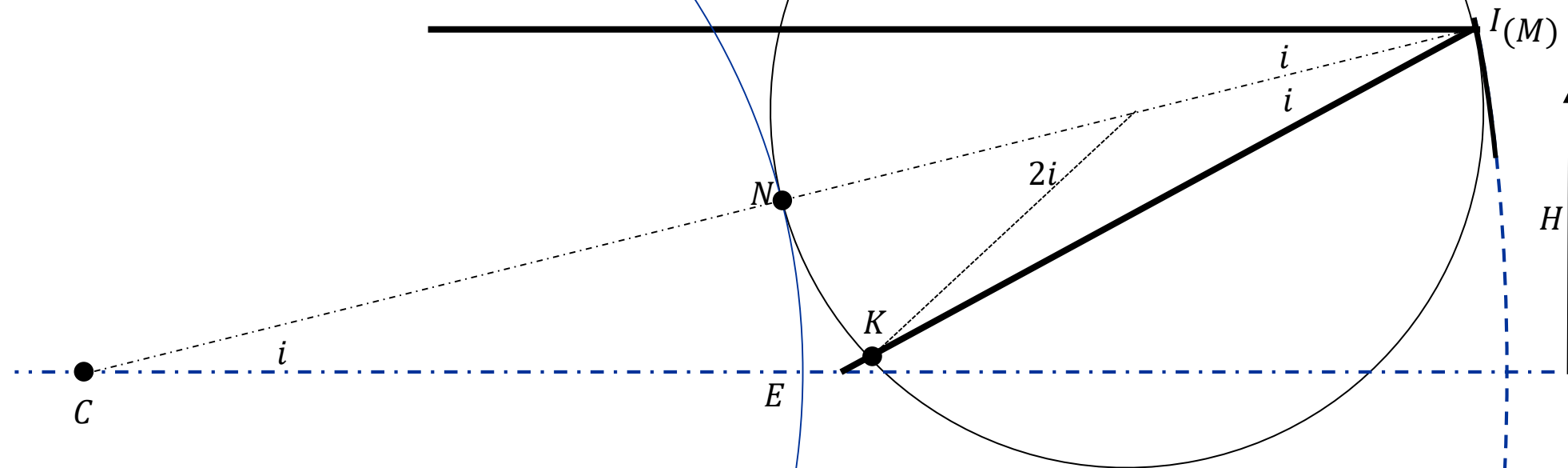
Les rayons sagittaux frappent le miroir (M) à la même hauteur H au-dessus de l'axe du miroir $(\mathcal{M})$: ils se focalisent tous en S' , qui est sur la caustique sagittale d'aberration sphérique de $\mathcal{M}$

S' est dans le plan image contenant F'_p . Donc $C'_S = 0$.



20

Courbure tangentielle du miroir sphérique $\infty \rightarrow F'$



K : le point où un rayon tangentiel intercepte le cercle (noir) de rayon $R/4$

$\widetilde{NE} = \widetilde{NK}$: le cercle (noir) de rayon $R/4$ roule sans glisser sur le cercle (bleu) de rayon $R/2$

N : centre instantané de rotation $\rightarrow$ K se déplace perpendiculairement à NK, donc parallèlement à IK : K décrit l'enveloppe du rayon réfléchi

D'où $C'_T = -4/R$

- Astigmatisme & Courbure de champ sont deux défauts qui apparaissent dans le champ, même pour des systèmes peu ouverts
- L'astigmatisme naît d'un défaut de symétrie de révolution du front d'onde, de type « cylindre ». Rayons tangentiels et rayons sagittaux se focalisent en deux points distants, qui définissent un « segment de netteté » le long du rayon moyen. La tache de diffusion est minimale au milieu de ce segment. L'image d'un objet de grandeur y n'est jamais nette. Les images tangentielles et sagittales se forment sur deux surfaces courbes, qui s'écartent l'une de l'autre comme y'^2 .
- La courbure de champ naît d'un défaut de courbure global du front d'onde
→ L'image d'un objet plan est nette mais sur une surface image courbée, qui s'écarte du plan image paraxial comme y'^2 .
- Astigmatisme & Courbure de champ conduisent tous deux à des taches de diffusion qui croissent comme $y'^2 \alpha'$
- Ecart normal d'astigmatisme : selle de cheval, d'amplitude croissant comme $y'^2 \alpha'^2$
- Ecart normal de courbure de champ : comme un « defocus », mais d'amplitude croissante comme $y'^2 \alpha'^2$
- Pour un miroir sphérique portant la pupille, en conjugaison $\infty \rightarrow F'$, $C_S = 0$ (la surface image sagittale est plane), et $C_T = -4/R$

On souhaite observer une étoile dans le domaine visible à l'aide d'un télescope constitué d'un miroir primaire sphérique et d'un miroir secondaire plan. Le télescope a une focale de 1m et est ouvert à $F/20$. L'étoile est à 10° de l'axe du télescope. **Evaluer, dans le plan image paraxial,**

1. le rayon de la tache d'aberration sphérique;
2. la plus grande dimension de l'aigrette de coma (on admettra que la coma est la même que pour un miroir parabolique).
3. En supposant l'aberration sphérique et la coma négligeables, de combien et dans quel sens doit-on déplacer le plan du détecteur, par rapport au plan paraxial, pour obtenir une tache de diffusion la plus petite possible ?
4. Quelles sont alors la forme et la dimension de cette tache ? Le système est-il limité par la diffraction ? L'aberration sphérique et la coma peuvent-elles effectivement être négligées ?
5. A quoi ressemble approximativement la tache de diffusion si on maintient le détecteur dans le plan paraxial (décrire sa forme, son orientation, et sa dimension) ?