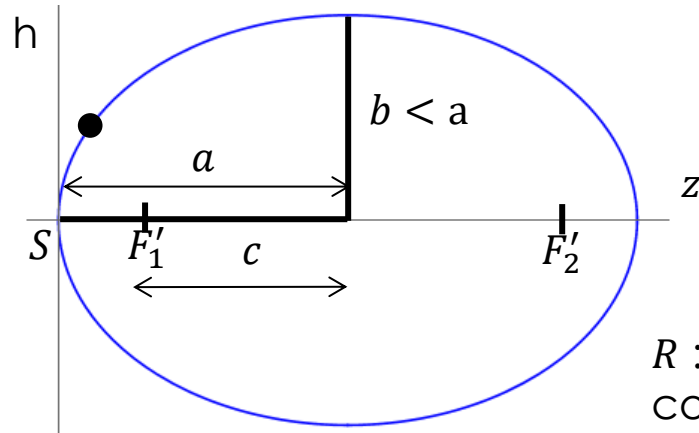


Surfaces quadriques de révolution



$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 - b^2} \\ e &= c/a \\ \varepsilon &= -e^2, -1 < \varepsilon < 0 \\ R &= \frac{b^2}{a} = a(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

R : rayon de courbure en S

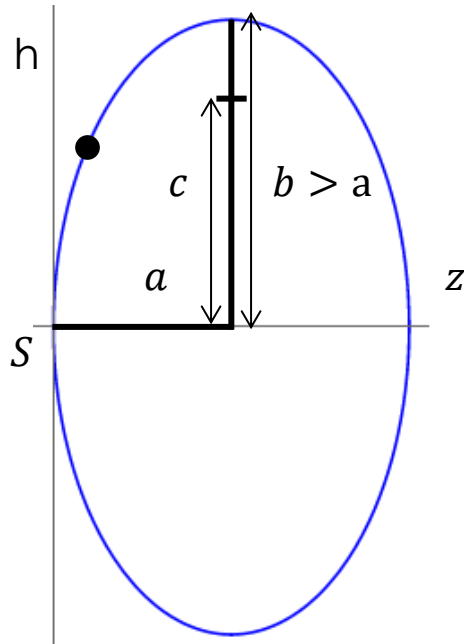
Ellipsoïde (allongé)

Equation exacte :

$$\frac{(z - a)^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$$

Equation approchée :

$$z = \frac{h^2}{2R} + \frac{h^4}{8R^3} (1 + \varepsilon) + o(h^4)$$

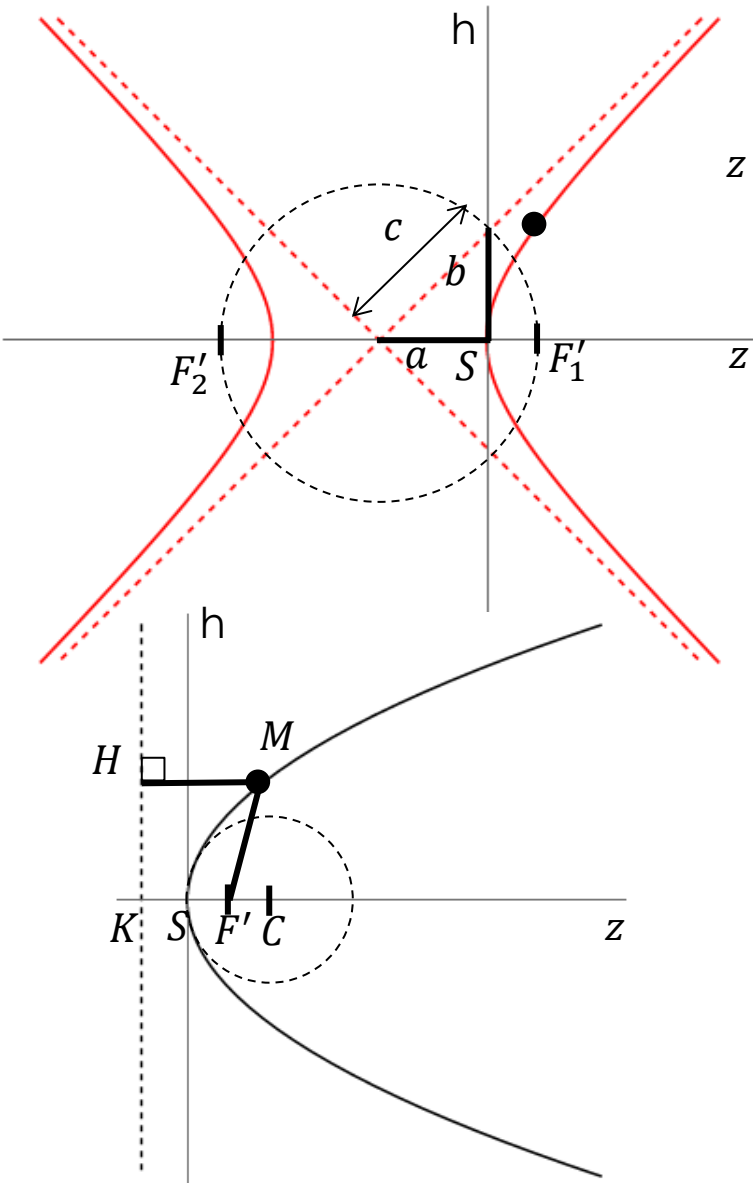


$$\begin{aligned} c &= j\sqrt{b^2 - a^2} \\ e &= c/a \\ \varepsilon &= -e^2, \varepsilon > 0 \\ R &= \frac{b^2}{a} = a(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

R : rayon de courbure en S

Ellipsoïde (aplati)

Surfaces quadriques de révolution



$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$e = c/a$$

$$\varepsilon = -e^2, \varepsilon < -1$$

$$R = \frac{b^2}{a} = -a(1 + \varepsilon)$$

R : rayon de courbure en S

R : rayon de courbure en S

Hyperboloïde

Equation exacte :

$$\frac{(z + a)^2}{a^2} - \frac{h^2}{b^2} = 1$$

Equation approchée :

$$z = \frac{h^2}{2R} + \frac{h^4}{8R^3}(1 + \varepsilon) + o(h^4)$$

Paraboloïde

Equation exacte :

$$MF' = MH$$

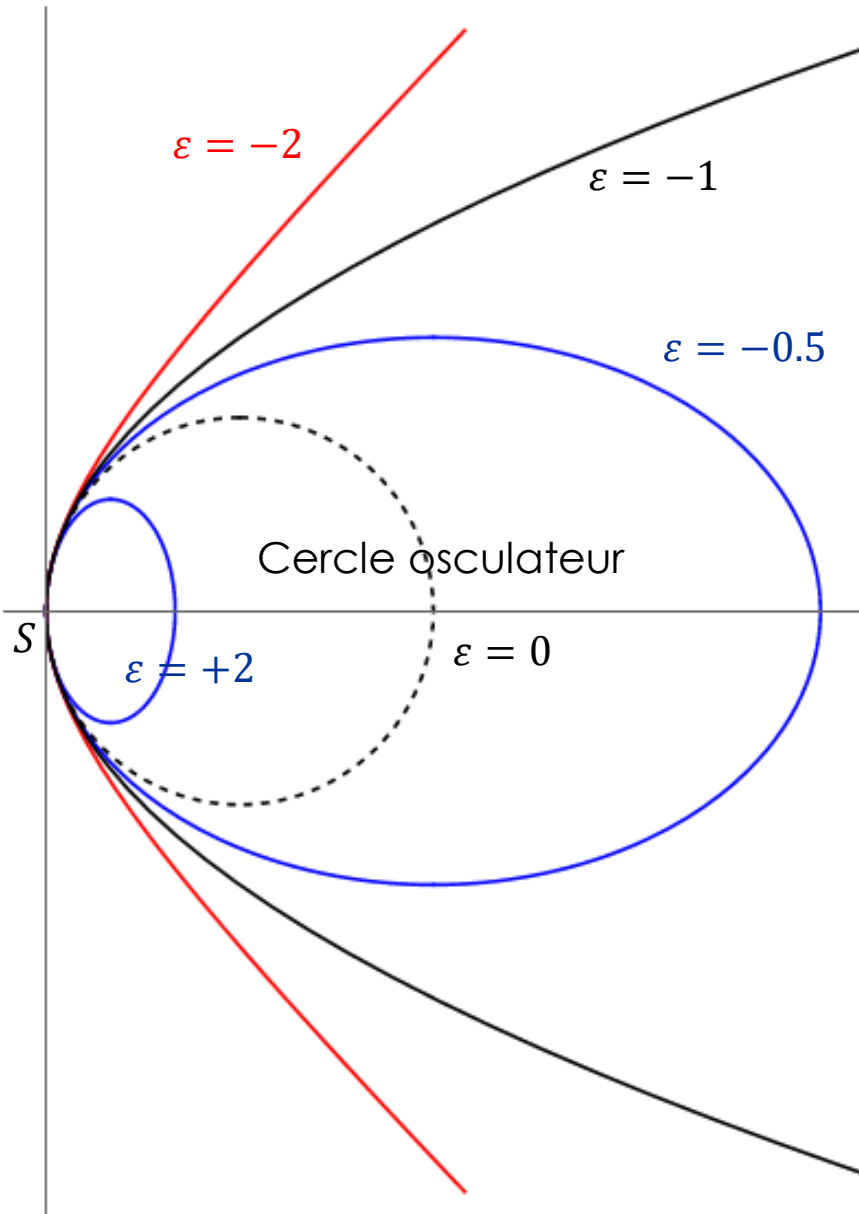
$$z = \frac{h^2}{2R}$$

Quadriques de révolution de R donné

Une équation approchée unique :

$$z = \frac{h^2}{2R} + \frac{h^4}{8R^3} (1 + \varepsilon) + o(h^4)$$

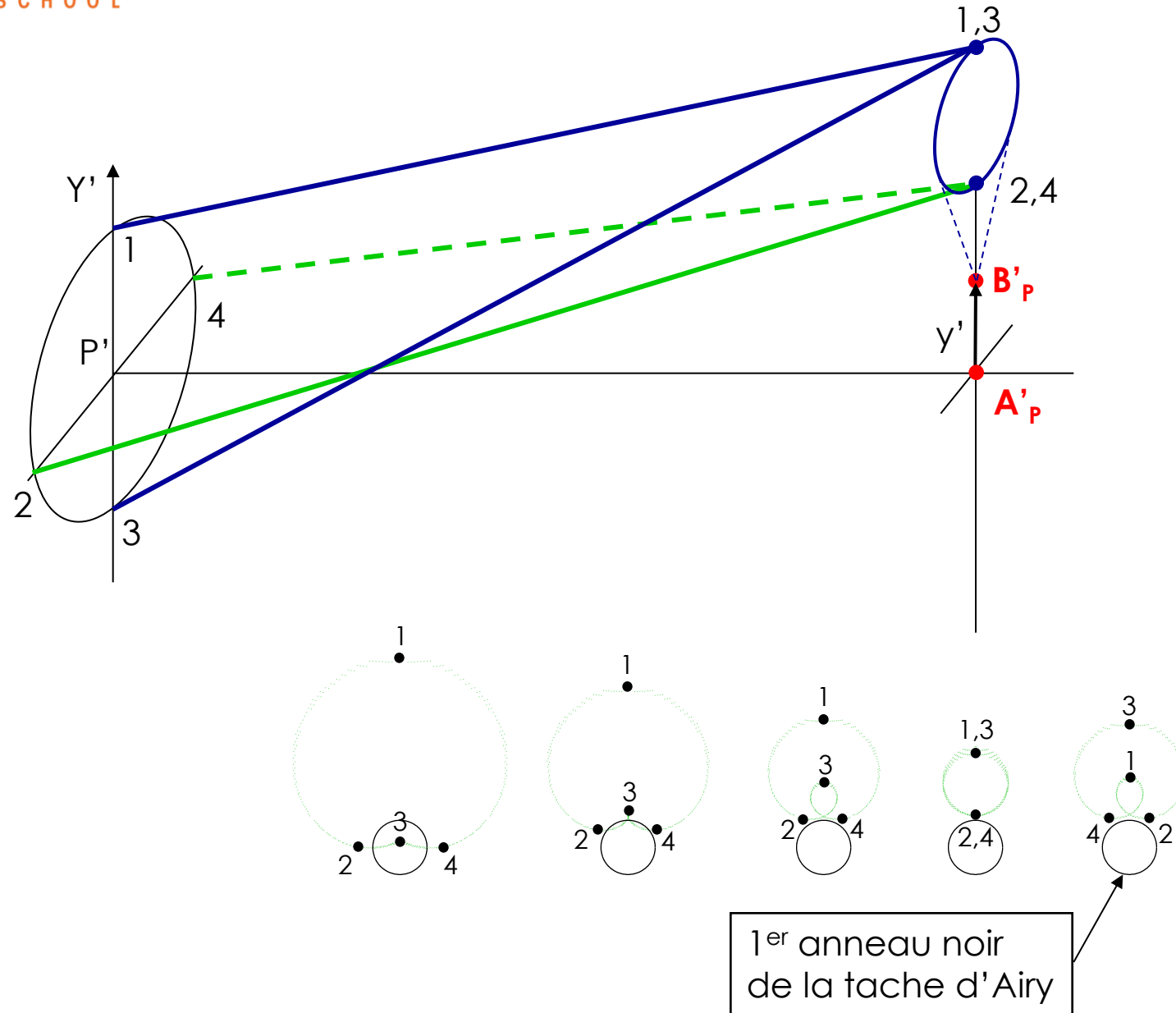
ε : ellipticité de la surface (*Conicity Constant*)

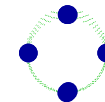


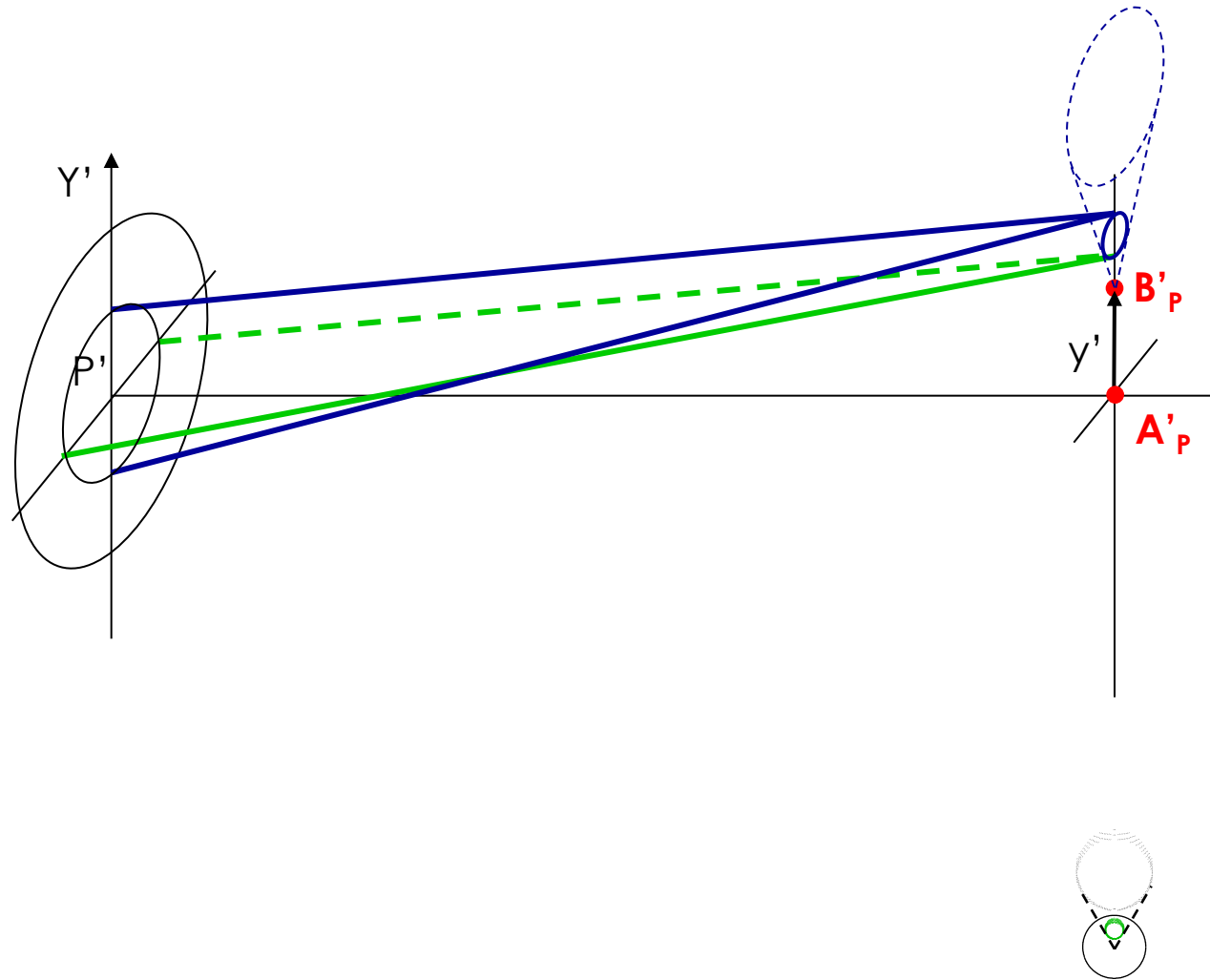
$\varepsilon > 0$	Ellipsoïde aplati
$\varepsilon = 0$	Sphère
$-1 < \varepsilon < 0$	Ellipsoïde allongé
$\varepsilon = -1$	Paraboloïde
$\varepsilon < -1$	Hyperboloïde

Chapitre 4

La coma





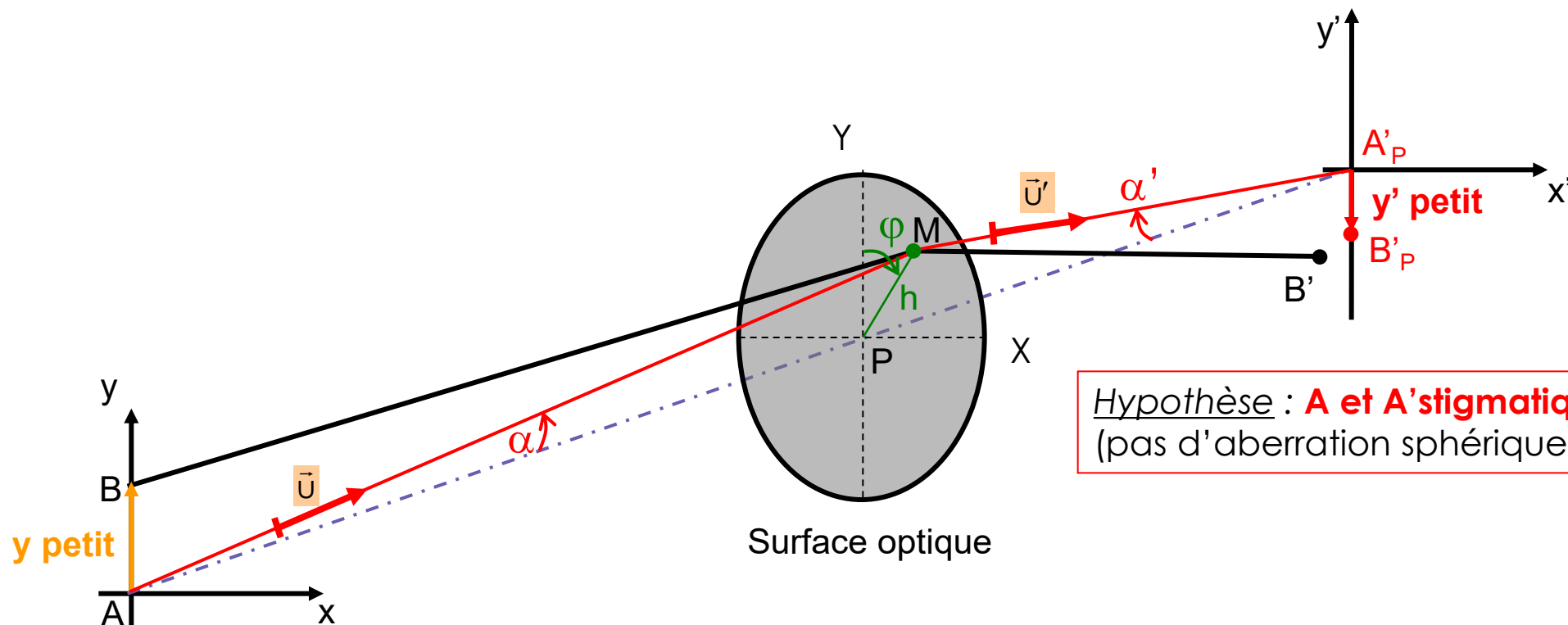


Coma pure : relations générales

Ecart normal :

par rapport à la sphère S_P
centrée en B'_P

$$\Delta(y', \alpha', \varphi) \propto \left(\frac{\alpha'}{\alpha'_{\max}} \right)^{2p+1} \left(\frac{y'}{y'_{\max}} \right) \cos \varphi \quad (p \geq 1)$$



Hypothèse : **A et A'sigmatiques**
(pas d'aberration sphérique)

Pour un point objet au voisinage de l'axe :

$$n' \Delta_{\text{coma}} = (n y \sin \alpha - n' y' \sin \alpha') \cos \varphi$$

Pour un point objet au voisinage de l'axe :

$$n' \Delta_{\text{coma}} = (n y \sin \alpha - n' y' \sin \alpha') \cos \varphi$$

Preuve : $\vec{u} \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \varphi \\ \sin \alpha \cos \varphi \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{AB} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{u}' \begin{bmatrix} \sin \alpha' \sin \varphi \\ \sin \alpha' \cos \varphi \\ \cos \alpha' \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{A'B'} \begin{bmatrix} 0 \\ y' \\ 0 \end{bmatrix}$

$$n' \Delta_{\text{coma}} = L_B(P) - L_B(M) = L_B(P) - L_A(P) + L_A(P) - L_A(M) + L_A(M) - L_B(M)$$

$$\partial L = L_B(M) - L_A(M) = n' \overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{u}' - n \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = n' y' \sin \alpha' \cos \varphi - n y \sin \alpha \cos \varphi$$

$$\partial L_0 = L_B(P) - L_A(P) = 0$$

$$L_A(P) - L_A(M) = 0 \text{ (stigmatisme de A et A')}$$

Coma pure : écart normal

La coma naît de l'**écart à la condition des sinus d'Abbe***



Ernst Abbe
(1840-1905)

la quantité $\frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'}$ dépend de α' , et : $\frac{n \sin \alpha}{n' \sin \alpha'} = g_y(\alpha') \xrightarrow{\alpha' \rightarrow 0} (g_y)_P$

On introduit $\phi(\alpha') = \frac{n y \sin \alpha}{n' y' \sin \alpha'} - 1 = \frac{g_y(\alpha') - (g_y)_P}{(g_y)_P}$: écart à la condition des sinus d'Abbe

$\phi(\alpha')$ est paire, et $\phi(0)=0 \rightarrow \phi(\alpha') = b\alpha'^2 + b'\alpha'^4 + \dots$

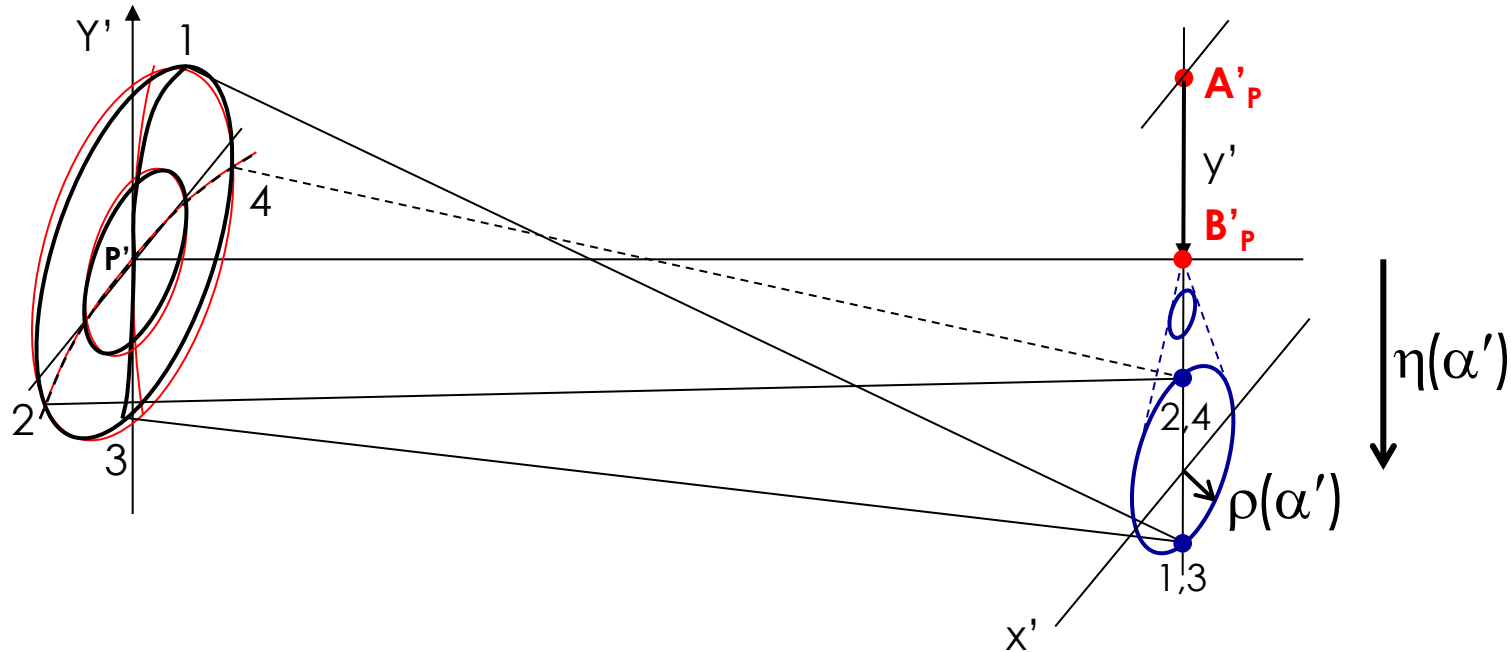
Ecart normal : $n' \Delta_{\text{coma}} = n' y' \phi(\alpha') \sin \alpha' \cos \varphi$

Note * : Ne pas confondre « condition des sinus d'Abbe » : $n y \sin \alpha = n' y' \sin \alpha'$ (pas toujours vraie) et « invariant de Lagrange-Helmholtz » : $n y \alpha = n' y' \alpha'$, qui est toujours vrai dans la limite paraxiale **10**

Coma pure : déformation du front d'onde & tache de diffusion

$$\Delta_{\text{coma}} = y' \phi(\alpha') \sin \alpha' \cos \varphi$$

Nijboer $\rightarrow$
$$\begin{cases} dy' = \eta(\alpha') + \rho(\alpha') \cos 2\varphi \\ dx' = \rho(\alpha') \sin 2\varphi \end{cases}$$



- Ecart normal **en présence d'aberration sphérique** :

Pour un point objet
au voisinage de l'axe optique

$$n'\Delta = n'\Delta_{\text{ab. sph.}} + \underbrace{(nys\sin\alpha - n'y'\sin\alpha'_p)}_{n'\Delta_{\text{coma}}} \cos\varphi$$

- Conditions d'**aplanétisme** pour à une conjugaison particulière $A \rightarrow A'$
pas d'aberration sphérique : $\Delta_{\text{ab. sph.}} = 0$
pas de coma : $\forall \alpha, \quad nys\sin\alpha = n'y'\sin\alpha'_p$: **condition des sinus d'Abbe**
 → système optique sans défaut au voisinage de l'axe optique

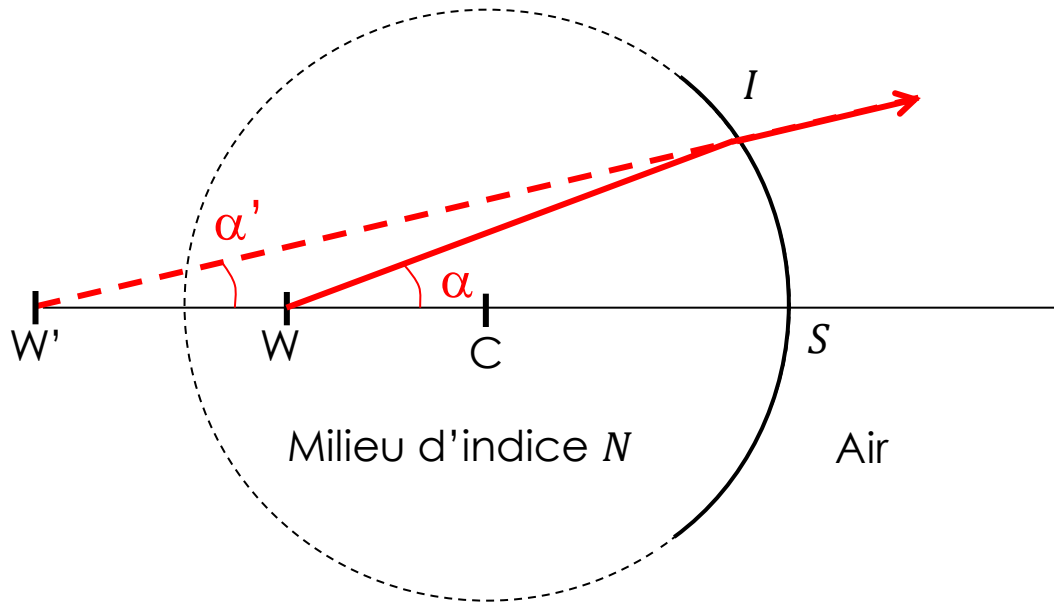
Exemples de systèmes et conjugaisons aplanétiques

dioptré sphérique & miroir sphérique : $C \rightarrow C$ et $S \rightarrow S$

dioptré sphérique : $W \rightarrow W'$ (points de Young-Weierstrass)

Exemples de systèmes stigmatiques sur l'axe, mais présentant de la coma : miroir parabolique $\infty \rightarrow F'$, miroir elliptique $F \rightarrow F'$
 dioptré hyperbolique $\infty \rightarrow F'$

Points de Young-Weierstrass



$$L = (WIW') = n \overline{WI} + n' \overline{IW'} \triangleq 0$$

D'où
$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} = \frac{n'}{n}$$

$$I \rightarrow S : \mathbf{nz = n'z'}$$

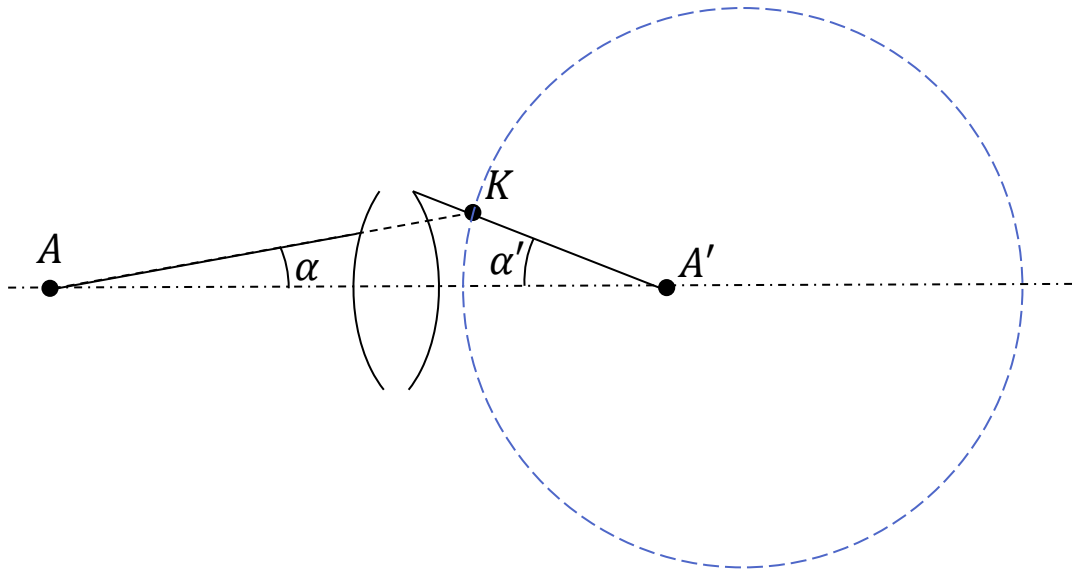
En injectant dans $\frac{n'}{z'} - \frac{n}{z} = \frac{n'-n}{R}$,

$$z = R\left(\frac{n'}{n} + 1\right) \quad \overline{CW} = R \frac{n'}{n}$$

$$z' = R\left(\frac{n}{n'} + 1\right) \quad \overline{CW'} = R \frac{n}{n'}$$

Une condition nécessaire d'aplanétisme

$\forall \alpha, \quad n y \sin \alpha = n' y' \sin \alpha'_P$ implique que $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = cste$, donc que $\frac{\overline{A'K}}{\overline{AK}} = cste$ pour tout K



Notons k cette constante.

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A'K}}{\overline{AK}} = k &\Leftrightarrow (\overline{A'K} + k\overline{AK}) \cdot (\overline{A'K} - k\overline{AK}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overline{S_1K} \cdot \overline{S_2K} = 0 \\ &\Rightarrow \mathbf{K \text{ appartient à un cercle}} \end{aligned}$$

Corollaire : les dioptries ou miroirs **a**sphériques stigmatiques pour un couple de points (A, A') présentent nécessairement de la coma :

- miroir parabolique $\infty \rightarrow F'$,
- miroir elliptique $F \rightarrow F'$,
- dioptre hyperbolique $\infty \rightarrow F'$

Approche géométrique (valide lorsque $|dy'| \gg R_{\text{Airy}}$)

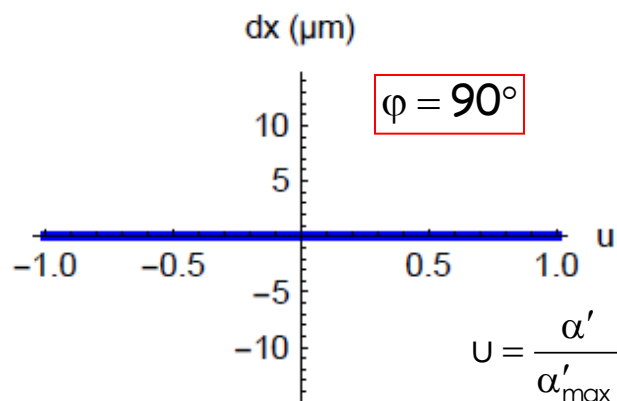
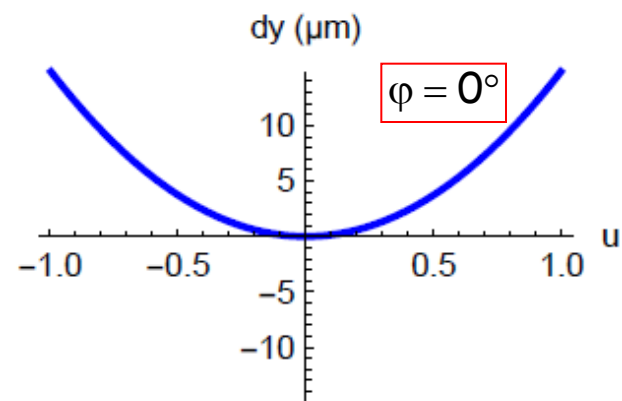
Ecart à la condition
des sinus d'Abbe :

$$\phi(\alpha') = b \alpha'^2$$

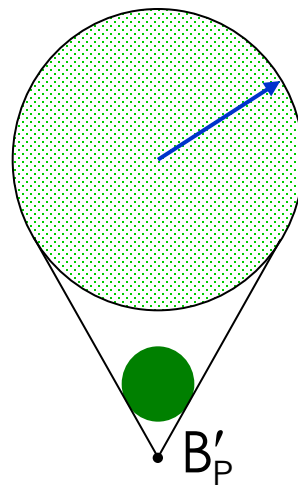
Tache de diffusion :

$$\begin{cases} dy' = b y' \alpha'^2 (2 + \cos 2\phi) = \rho (2 + \cos 2\phi) \\ dx' = b y' \alpha'^2 \sin 2\phi = \rho \sin 2\phi \end{cases}$$

Courbes de tracés de rayons (*Ray Intercept Curves*):



$$u = \frac{\alpha'}{\alpha'_{\max}}$$



Spot diagramme

notation OSLO

$$\text{CMA3} = |\rho| = |b y' \alpha'^2_{\max}|$$

$$\alpha'_{\max}$$

$$\alpha'_{\max} / 2$$

Approche géométrique (valable lorsque $|dy'| \gg R_{\text{Airy}}$)

Ecart à la condition
des sinus d'Abbe :

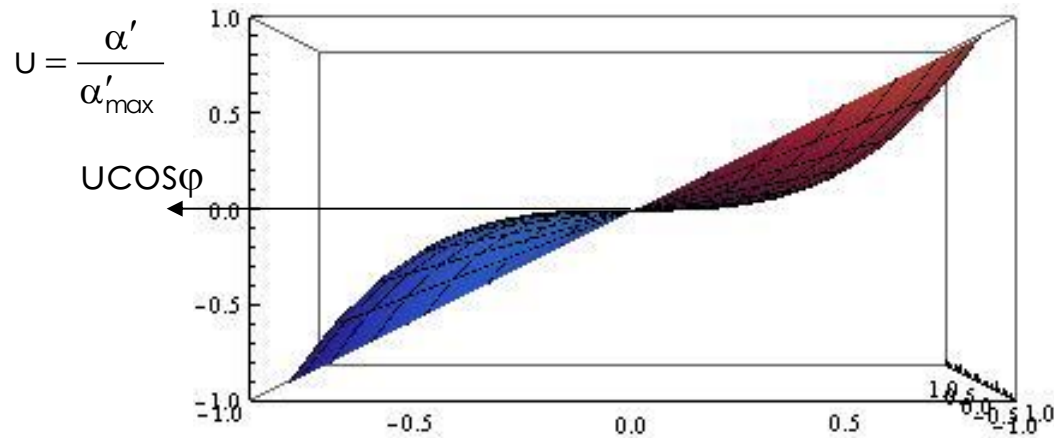
$$\phi(\alpha') = b \alpha'^2$$

Tache de diffusion :

$$\begin{cases} dy' = b y' \alpha'^2 (2 + \cos 2\phi) = \rho (2 + \cos 2\phi) \\ dx' = b y' \alpha'^2 \sin 2\phi = \rho \sin 2\phi \end{cases}$$

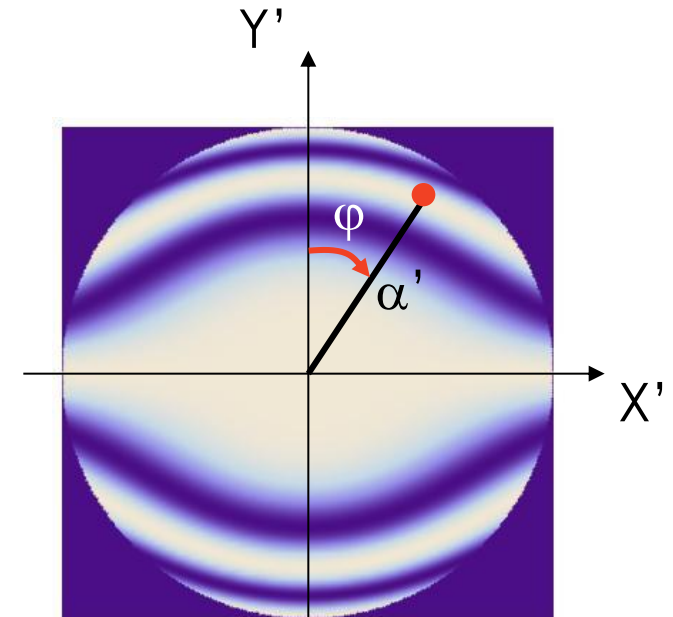
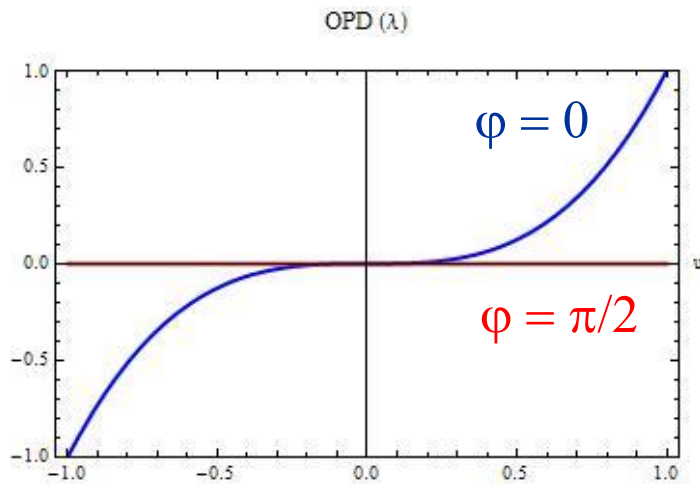
Ecart normal / sphère S_p :

$$\Delta = b y' \alpha'^3 \cos \phi$$



Développement de l'écart normal sur la pupille :

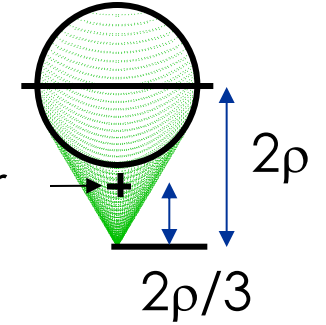
$$\Delta = \Delta_{\text{CMA}} U^3 \cos \varphi \quad \text{par rapport à la sphère } S_p \text{ centrée en } B'_p$$



Interférogramme (ZYGO)

$$I(\alpha', \varphi) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{2\Delta}{\lambda} \right) \right]$$

Meilleur foyer : situé à $2\rho/3$ de B' paraxial (au 3^e ordre)



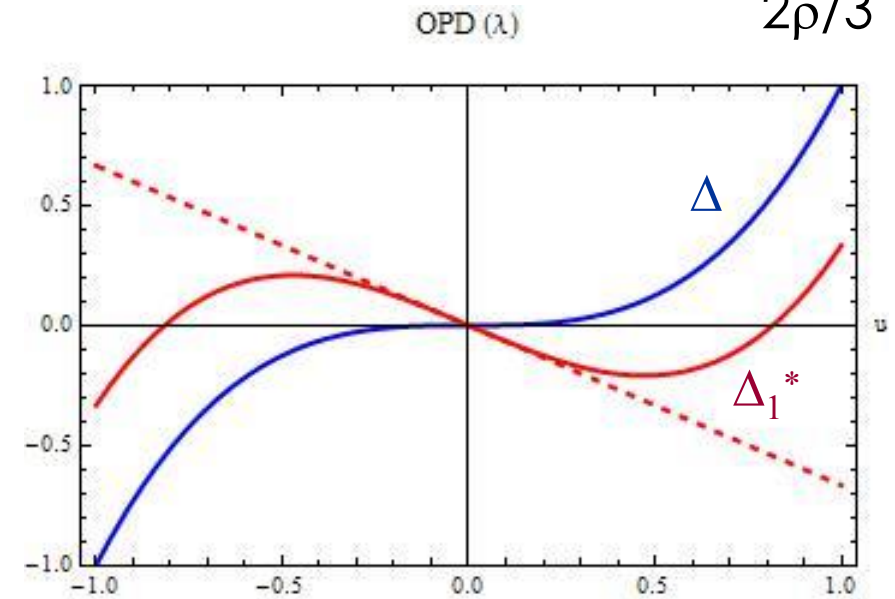
$$\Delta = \Delta_{CMA} u^3 \cos \varphi / S_p$$

$$\Delta_1 = \Delta_{CMA} u^3 \cos \varphi + \Delta_{TLT} u \cos \varphi / S_1$$

$$\Delta_1^* = \Delta_{CMA} (u^3 - \frac{2}{3}u) \cos \varphi / S_1^*$$

Développement sur les polynômes de Zernike

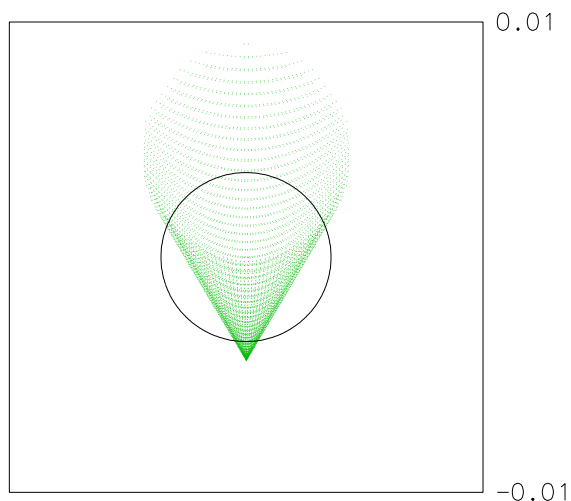
$$\sigma_{\Delta} = \Delta_{CMA} \times \frac{1}{\sqrt{8}} \quad \sigma_{\Delta_1^*} = \sigma_{\Delta} / 3$$



Tolérances selon le critère de Maréchal ($\sigma_{\Delta} < \lambda/14$)

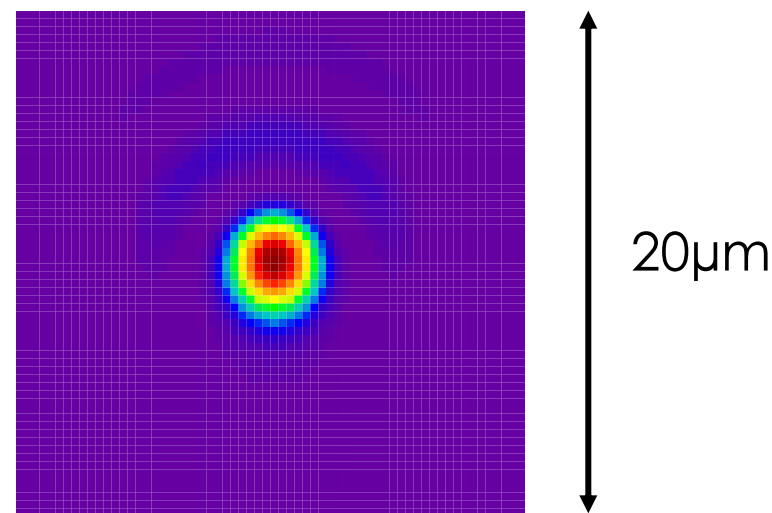
- Pour une mise au point à l'image paraxiale : $\Delta_{CMA} < 0.20\lambda$
- Pour une mise au point au meilleur foyer : $\Delta_{CMA} < 0.60\lambda$

Exemple : miroir parabolique $f'=1000\text{mm}$, $\text{ON}=0.1$, $\theta = 0.1^\circ$



$$R_{\text{airy}} = 3.6\mu\text{m}$$

$$\rho = 4.4\mu\text{m}$$



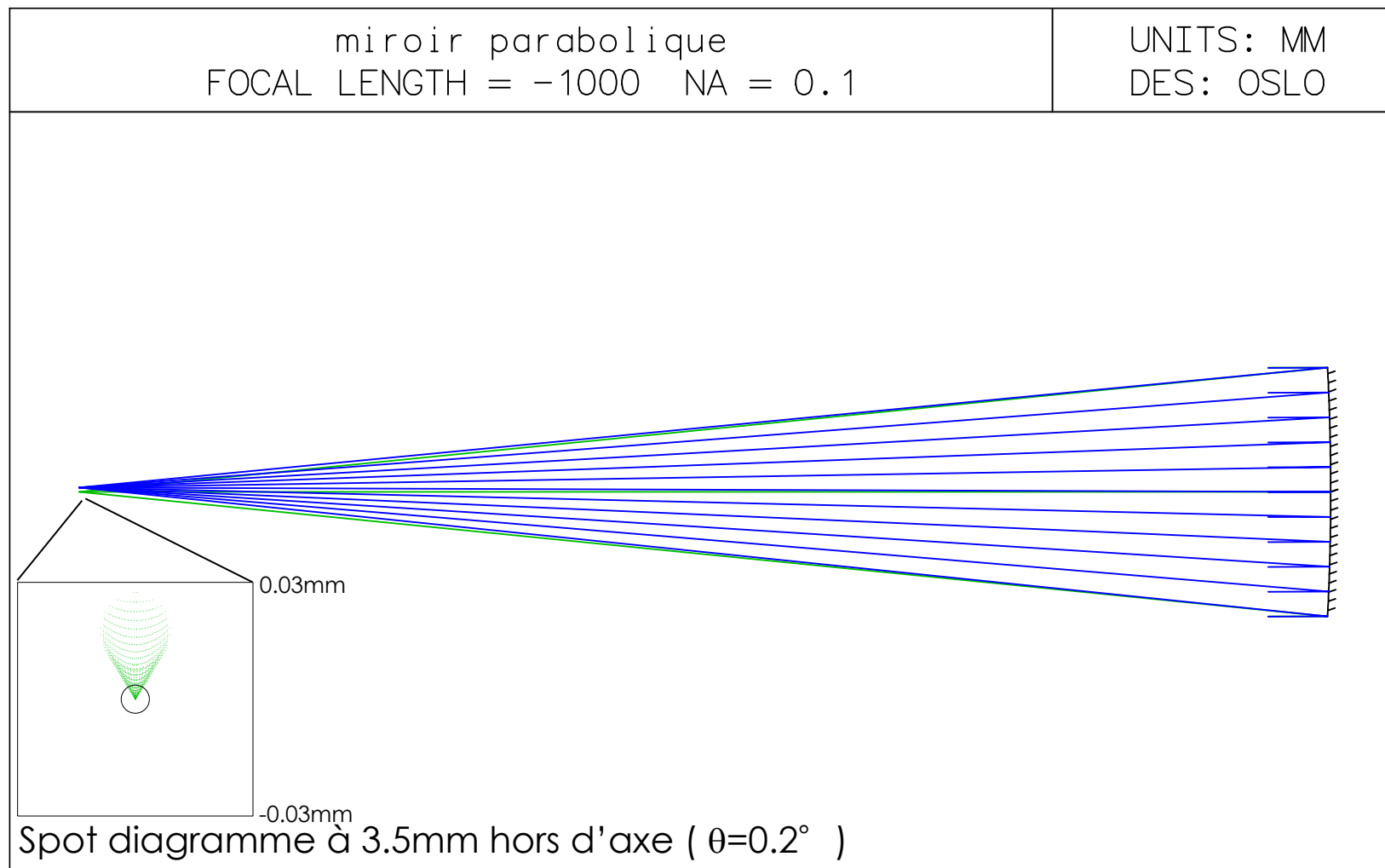
$$R_s = 0.08 \text{ au foyer paraxial}$$

$$R_s^* = 0.74 \text{ au meilleur foyer}$$

Coma 3^e du Miroir parabolique $\infty \rightarrow F'$

Pour un miroir parabolique en conjugaison $\infty \rightarrow F'$

$$b = 1/4$$



- Origine de la coma : écart à la condition des sinus d'Abbe; on caractérise l'amplitude de cet écart par un coefficient sans dimension, b
- Coma d'ordre 3 :
 - La tache de diffusion a la forme d'une comète, ou d'une « aigrette »
 - Dimensions de l'aigrette dans le plan paraxial : 3ρ avec $\rho = by'\alpha'^2$
 - Ecart normal par rapport à la sphère paraxiale : $\Delta = by'\alpha'^3 \cos \varphi$
- Forme de la déformation du front d'onde pour une sphère de référence centrée au foyer paraxial, ou au meilleur foyer.
- Pour un miroir parabolique portant la pupille, en conjugaison $\infty \rightarrow F'$, $b = 1/4$
- Notion d'aplanétisme
- Savoir citer quelques exemples de conjugaison aplanétique



Exercice 1: aplanétisme des points de Young-Weierstrass

On considère la conjugaison aux points d'Young-Weierstrass $W \rightarrow W'$ d'un dioptré sphérique séparant un milieu objet (d'indice n) d'un milieu image (d'indice n'),

1. **Calculer $\sin \alpha / \sin \alpha'$ et en déduire que la conjugaison $W \rightarrow W'$ est aplanétique.**
2. **En déduire l'expression du grandissement transversal paraxial $(g_y)_P$, puis celle du grandissement angulaire paraxial $(g_\alpha)_P$, en fonction de n et n' .**

Exercice 2: coma d'un miroir parabolique

Un astronome amateur observe une étoile dans le spectre visible ($\lambda = 587\text{nm}$) à l'aide d'un télescope de Newton (miroir primaire parabolique + miroir secondaire plan) équipé d'un oculaire de focale 15mm. Le télescope est ouvert à F/5 et sa focale vaut 1m.

Sachant que l'étoile est à 1° de l'axe du télescope, et que la résolution angulaire de l'oeil est de $2'$ d'arc, décrivez précisément ce que voit l'astronome.