Polarisation de la lumière

Equipe pédagogique :

Nathalie Westbrook — Cours

Eirini Papagiannouli
Nicolas Schlosser
Jeanne Bernard
Elio Thellier
Mal Landru

Travaux dirigés

9 cours + 6 TD + 1TP/TD + 2 séances de tutorat (26 h)

1 TP au S6, 4 TP au S7

Qu’est-ce que la polarisation de la lumière?

La lumière peut être représentée par un champ électrique oscillant à une fréquence très élevée

La polarisation est la direction de ce champ électrique: C’est un vecteur!

La polarisation la plus simple est linéaire, mais il existe des polarisations circulaires ou elliptiques.

Qu’est-ce qu’un milieu anisotrope?

Les milieux anisotropes sont des milieux où
la propagation de la lumière (vitesse, direction)
va dépendre de sa polarisation

Où rencontre-t-on des milieux anisotropes et à quoi servent-ils?

1) Lames demi-onde ou quart d’onde (+ les polariseurs « polaroïd » qui sont anisotropes en absorption)
2) Cubes séparateurs de faisceaux (une sortie pour chaque polarisation orthogonale)
3) Modulateurs à cristaux liquides (écrans LCD), modulateurs et déflecteurs électro-optiques
4) Cristaux pour l’optique non linéaire (dans les lasers verts doublés en fréquence par exemple)
5) Tissus conjonctifs (riches en fibres de collagène)

Plan du cours 2024

Partie 1: Propagation dans les milieux anisotropes

ellipsoïde des indices, surface des vitesses, constructions de rayons

OBJECTIF 1: Réaliser un tracé de rayons dans un milieu anisotrope uniaxe

Pouvoir rotatoire

Partie 2 : Lumière polarisée

Etats de polarisation: représentations graphiques et matricielles

Composants de polarisation passifs et actifs: fonction et réalisation pratique: polariseurs, lames retard, isolateur optique, cristaux liquides, …

OBJECTIF 2: Calculer un état de polarisation à la sortie d'un système

OBJECTIF 3: Analyser un état de polarisation inconnu

OBJECTIF 4: Concevoir un système utilisant les états de polarisation

Partie 3: Interférences en lumière polarisée

connection avec les interférences vues en optique physique

OBJECTIF 5: Interpréter une expérience d'interférences utilisant de la lumière polarisée

Supports de cours et évaluation

Supports sur ecampus

Poly pour la partie 1

Transparents déposés au fur et à mesure de l'avancement du cours

Textes des TD

Evaluation:

examen écrit de 3h sans documents sauf A4 manuscrite recto verso et calculatrice

3 parties: questions de cours et 2 exercices

Examens des deux années précédentes disponibles sur ecampus

Partie 1
Propagation dans les milieux anisotropes

1) Matériaux biréfringents, ellipsoïde des indices

2) Polarisations propres

3) Vecteurs d'onde et Rayons dans un milieu uniaxe, surface des indices et surface des vitesses

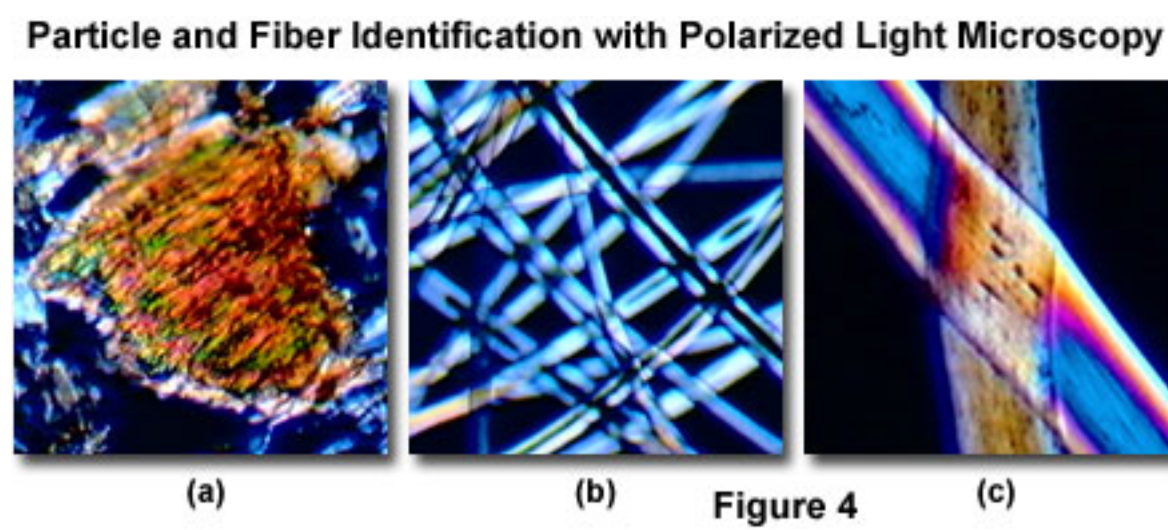
4) Réfraction des rayons dans un milieu uniaxe

Matériaux biréfringents linéaires

Exemples de matériaux biréfringents: cristaux, tissus formés de fibres, plastiques soumis à une déformation mécanique

CaCO3: calcite

Double réfraction à travers un cristal de calcite



(a) Poudre de bois (b) fibres de nylon (c) cheveu vus au microscope polarisant

Comment caractérise-t-on la biréfringence linéaire d'un matériau?

La matrice de permittivité diélectrique

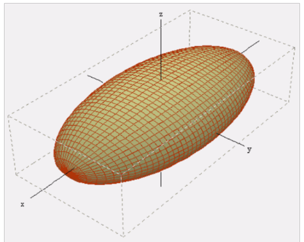
$$\vec{P}^{l} = \varepsilon_0 [\chi] \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 ([I] + [\chi]) \vec{E}$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon] \vec{E}$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix}$$

Si isotrope: $n_x = n_y = n_z = n$

L'ellipsoïde des indices

Pour chaque direction de polarisation (donnée par le vecteur D), on porte la valeur de l'indice correspondant dans cette direction



$$\boxed{\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1}$$

Lien vers animation 3D

Quel lien entre les deux descriptions?

On va commencer par écrire **l'équation de propagation** qui relie D et E du fait de la propagation dans une direction **k**=k**u**:

- **Equations de Maxwell** (dans un milieu sans sources) $div\,\vec{D} = 0\ ,\ div\,\vec{B} = 0\ ,\ rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\ ,\ rot\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

(Le milieu est supposé non-magnétique : $\mu = \mu_0$)

- On cherche une solution aux équations de Maxwell sous la forme d'une **onde plane** : $\vec{E} = \vec{E}_0\ e^{-i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$

Les eq de Maxwell se récrivent alors:

$$\vec{k}.\vec{D} = 0\ ,\ \vec{k}.\vec{B} = 0\ ,\ \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}\ ,\ \vec{k}\times\vec{H} = -\omega\vec{D}$$

- En combinant ces équations, on peut obtenir l'équation de propagation:

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0\omega^2}\vec{k}\times\left(\vec{k}\times\vec{E}\right) = \frac{k^2}{\mu_0\omega^2}\left[\vec{E} - \left(\vec{u}.\vec{E}\right)\vec{u}\right]$$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 n^2\left[\vec{E} - (\vec{u}.\vec{E})\vec{u}\right]}$$

Quel lien entre les deux descriptions?

On part de **l'équation de propagation (déduite des éq de Maxwell)**:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 \left[\vec{E} - (\vec{u}.\vec{E})\vec{u} \right]$$

En la multipliant scalairement par $\overrightarrow{\mathrm{D}}$, on obtient: $D^2 = \varepsilon_0 n^2 \mathbf{D}.\mathbf{E}$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{D^2}{n^2} = \varepsilon_0 \mathbf{D}.\mathbf{E} = \frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2}$$

$$\overrightarrow{OM}(x,y,z) = n \frac{\vec{D}}{D}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1}$$

ellipsoïde des indices

Propagation dans les milieux anisotropes

1) Matériaux biréfringents, ellipsoïde des indices

2) Polarisations propres

3) Vecteurs d'onde et Rayons dans un milieu uniaxe, surface des indices et surface des vitesses

4) Réfraction des rayons dans un milieu uniaxe

Quelles sont les ondes pouvant se propager dans une direction k donnée ?

• **Deux conditions à satisfaire**

1) $\vec{D} = \varepsilon_0 n^2 (\vec{E} - (\vec{u}.\vec{E})\vec{u}) = \varepsilon_0 n^2 (\vec{E} - \left[P^{\vec{u}}\right] \vec{E}) = \varepsilon_0 n^2 \left[P_\perp^{\vec{u}}\right] \vec{E}$

*Indice «vu» par l'onde de direction **u***

projection sur u

projection sur le plan perpendiculaire à u

2) $\vec{D} = \varepsilon_0 \left[\varepsilon\right]\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\varepsilon\right]^{-1}\vec{D}$

Dans la base propre,

$$\left[\varepsilon\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/n_z^2 \end{bmatrix}$$

=> Combinaison des deux conditions:

$$\boxed{\frac{\vec{D}}{n^2} = \left[P_\perp^{\vec{u}}\right]\left[\varepsilon\right]^{-1}\vec{D} = \left[A_{\vec{u}}\right]\vec{D}}$$

⇨ **C'est une équation aux valeurs propres**

Polarisations propres dans un milieu anisotrope

$$\boxed{\frac{\vec{D}}{n^2} = \left[P_{\perp}^{\vec{u}}\right]\left[\varepsilon\right]^{-1}\vec{D} = \left[A_{\vec{u}}\right]\vec{D}}$$

- **Vecteurs propres :** polarisations (vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{D}}$) possibles

Contrairement au cas isotrope, toutes les polarisations ne sont pas possibles.

- **Valeurs propres** $1/n^2$ **:** indices n correspondants

⇨ Les polarisations pouvant se propager sans déformation et les indices correspondants dépendent de la direction de propagation **u**

Propriétés des polarisations propres

• Si on exprime **D** dans une base constituée du vecteur **u** et de 2 vecteurs orthogonaux **v et w** du plan d'onde, on obtient

$$[A_{\vec{\mathbf{u}}}] = \left[P_{\perp}^{\vec{u}}\right] [\varepsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & \# & \# \\ \# & a & c \\ \# & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \# & a & c \\ \# & c & b \end{bmatrix}$$

$[\varepsilon]^{-1}$ n'est pas diagonale dans cette base, mais reste symétrique (comme $[\varepsilon]$)

• Seule la restriction de [A] au plan d'onde joue un rôle. On est donc ramené à la recherche des deux vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice 2x2 **symétrique à coefficients réels**

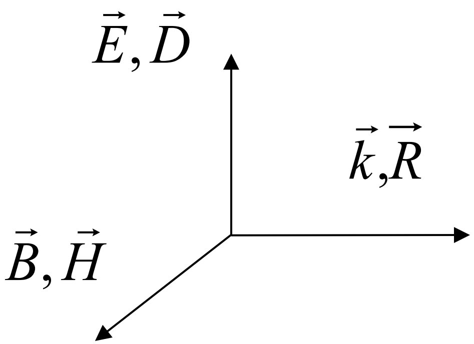
⇒ 2 valeurs propres **réelles** $1/n'^2$ et $1/n''^2$(on verra plus loin qu'elles sont forcément positives)

⇒ vecteurs propres **orthogonaux D' ⊥D'' et réels (polar. linéaires)**

⇒ **Les polarisations propres sont orthogonales**

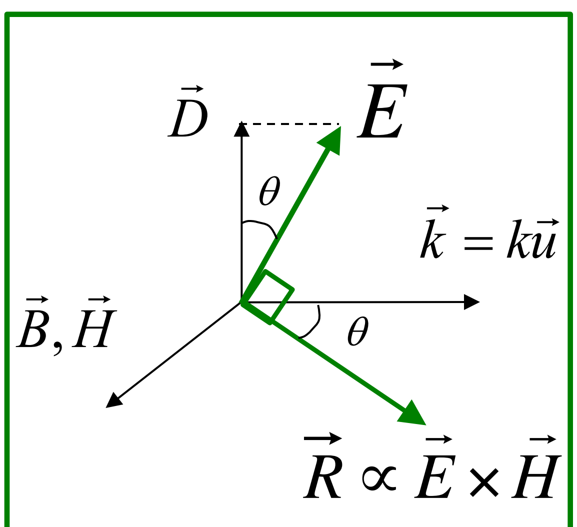
Orientation des différents vecteurs

- **<u>Milieu isotrope</u>**



- *E et D sont parallèles et transverses*
- *B et H leur sont orthogonaux, et transverses*
- *Le vecteur de Poynting* $\vec{R} \propto \vec{E} \times \vec{H}$ *est parallèle au vecteur d'onde k*

- **<u>Milieu anisotrope</u>**



- **E et D ne sont plus parallèles**
- ***R vecteur de Poynting*** *(direction du « rayon lumineux »)* ***n'est plus parallèle au vecteur d'onde k*** *(direction de propagation de la phase)*
  - *D, E, R et k sont dans le plan de polarisation (perpendiculaire à B et H)*
  - *D reste orthogonal à k, E orthogonal à R*

Comment utiliser l'ellipsoïde des indices pour trouver les polarisations propres?

Comment trouver E à partir de D?

Vecteur E correspondant à une direction de D (X_0,Y_0,Z_0):

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0}\begin{bmatrix} D_x / n_x^2 \\ D_y / n_y^2 \\ D_z / n_z^2 \end{bmatrix} = \frac{D}{\varepsilon_0 n}\begin{bmatrix} X_0 / n_x^2 \\ Y_0 / n_y^2 \\ Z_0 / n_z^2 \end{bmatrix}$$

Vecteur normal à l'ellipsoïde des indices en un point M(X_0,Y_0,Z_0):

$$\begin{bmatrix} X_0 / n_x^2 \\ Y_0 / n_y^2 \\ Z_0 / n_z^2 \end{bmatrix}$$

Pour une direction D fixée par un point M sur l'ellipsoïde:

E est normal à l'ellipsoïde au point M

Et B?

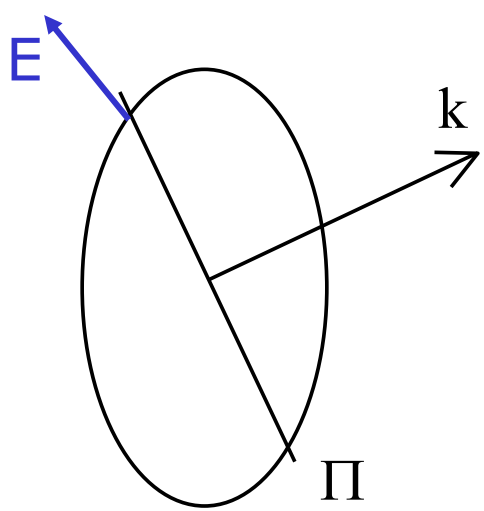
B, orthogonal à E et D, est donc tangent à l'ellipsoïde en M

Utiliser l'ellipsoïde des indices pour trouver les polarisations propres pour une direction de propagation k donnée

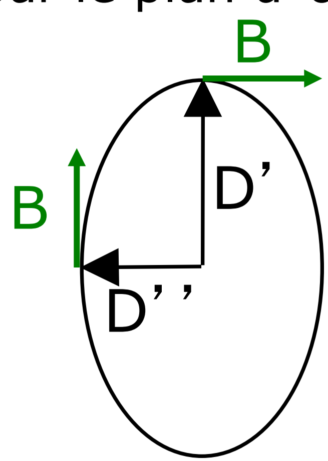
Pour un vecteur k de propagation, on sait que:

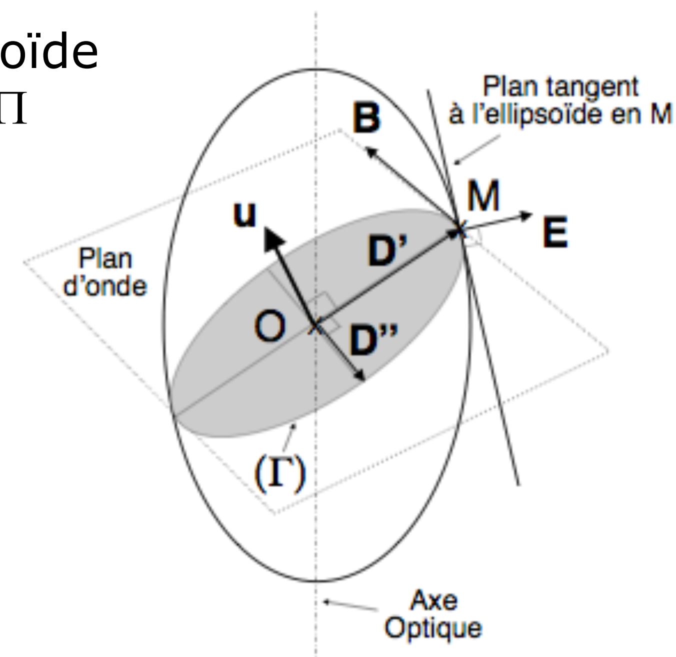
• D est dans le plan d'onde (orthogonal à k) donc à l'intersection de l'ellipsoïde des indices et du plan orthogonal à k, ce qui définit une ellipse

• D est orthogonal à B, qui est tangent à l'ellipsoïde, <u>donc les seules possibilités pour D' et D'' sont les deux axes de l'ellipse</u>



Intersection de l'ellipsoïde par le plan d'onde Π

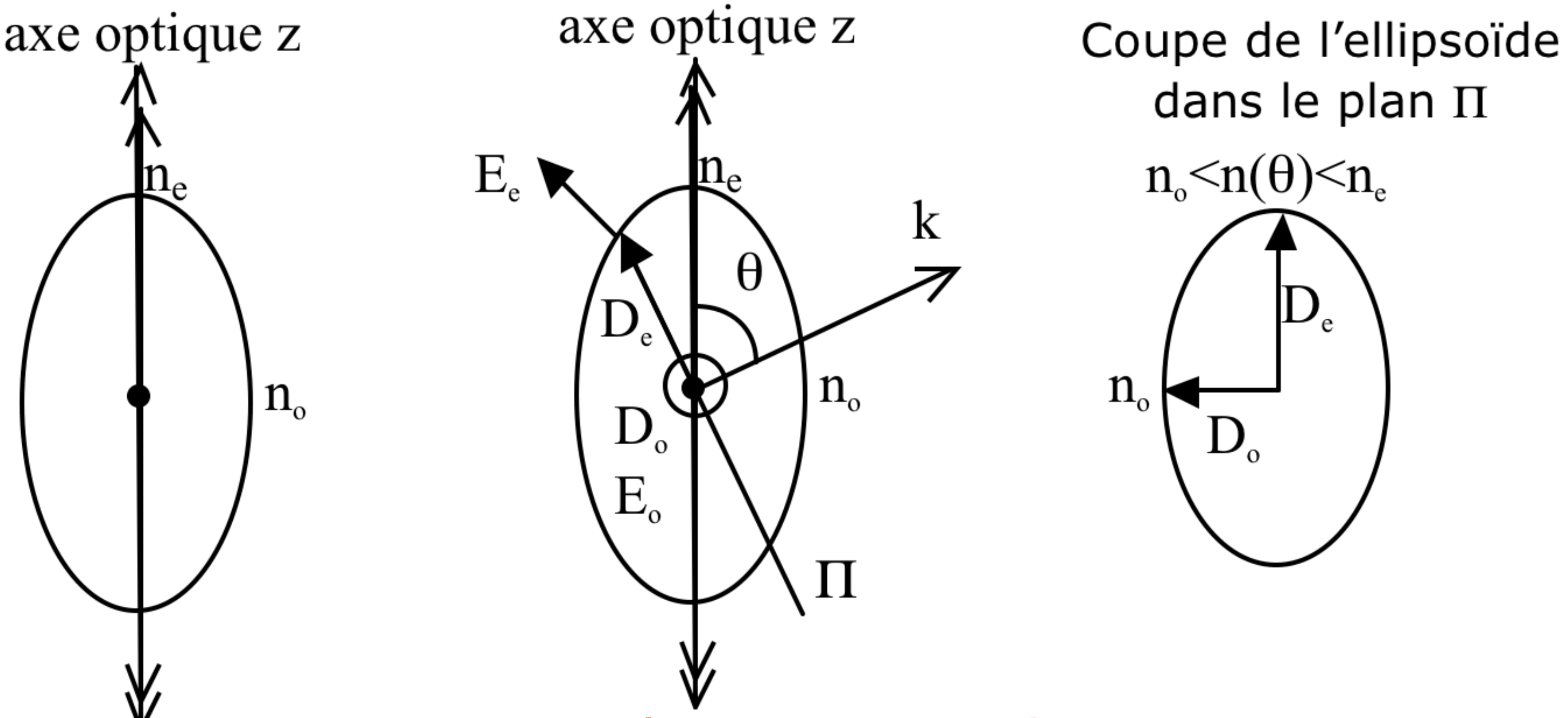




Ellipsoïde des indices pour un milieu uniaxe

$$\boxed{\frac{X^2}{n_o^2}+\frac{Y^2}{n_o^2}+\frac{Z^2}{n_e^2}=1}$$

Ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique z



La polarisation ordinaire D_o est toujours orthogonale à l'axe optique z!

Quelles propriétés générales pour les polarisations ordinaires et extraordinaires dans un milieu uniaxe?

① **Pour la polarisation ORDINAIRE**
- D_o et E_o colinéaires
- D_o et E_o orthogonaux à l'axe optique
- k_o et R_o colinéaires
- k_o et R_o orthogonaux à D_o et E_o

① **Pour la polarisation EXTRAORDINAIRE:**
- D_e orthogonal à D_o
- E_e orthogonal à E_o

Mais D_e et E_e NE SONT PAS colinéaires en général

- D_e orthogonal à k_e
- E_e orthogonal à R_e
- D_e dans le même plan que E_e et R_e

Deux cas particuliers

1) k parallèle à l'axe optique

La coupe de l'ellipsoïde par le plan d'onde est un cercle de rayon no
=> pas de polarisations propres, toutes les polarisations voient l'indice n_o comme dans un milieu isotrope

2) **k perpendiculaire à l'axe optique**

La coupe de l'ellipsoïde par le plan d'onde est une ellipse dont l'un des axes est l'axe optique

=> la polarisation extraordinaire est parallèle à l'axe optique
=> D_e et E_e sont colinéaires
=> k_e et R_e sont colinéaires
=> la polarisation extraordinaire voit l'indice n_e

Propagation dans les milieux anisotropes

1) Matériaux biréfringents, ellipsoïde des indices

2) Polarisations propres

3) Vecteurs d'onde et Rayons dans un milieu uniaxe, surface des indices et surface des vitesses

4) Réfraction des rayons dans un milieu uniaxe

Indices pour une direction de k fixée

*Pour une direction du vecteur d'onde **k**=k**u**, et on cherche les 2 valeurs d'indices possibles pour cette direction de propagation:*

$$n'(\vec{u}) = n'(\alpha,\beta,\gamma) \qquad n''(\vec{u}) = n''(\alpha,\beta,\gamma)$$

• Pour les déterminer, il faut résoudre l'équation aux valeurs propres

$$\det\left\{[A_{\vec{u}}] - \frac{1}{n^2} I\right\} = 0$$

• Cela revient à calculer le déterminant d'une matrice 3x3. Après plusieurs étapes de calcul, on aboutit à l'équation de Fresnel:

$$\alpha^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_y^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_z^2}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_z^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_x^2}\right)+\gamma^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_x^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_y^2}\right)=0$$

Remarque: En réduisant au même dénominateur, on obtient une équation du second degré du type n^4-Sn^2+P=0:

⇒ on retrouve les deux solutions n'² et n''² dont on a montré qu'elles étaient réelles

⇒ on peut montrer qu'elles sont positives:

⇒n' et n'' sont réels (propagation sans absorption)

Surface des indices

Définition: on porte les 2 valeurs possibles de l'indice n dans la direction de k

On cherche N tel que **ON**=n(**u**)**u**. Pour chaque u: 2 valeurs d'indice.

La surface des indices a donc deux nappes.

ON=(X=nα,Y=nβ,Z=nγ) avec $X^2+Y^2+Z^2=n^2$, l'équation de Fresnel devient:

$$X^2(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_y^2})(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_z^2})+Y^2(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_z^2})(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_x^2})+Z^2(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_x^2})(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_y^2})=0$$

On s'intéresse au cas particulier uniaxe positif: $n_x=n_y=n_o$, $n_z=n_e$

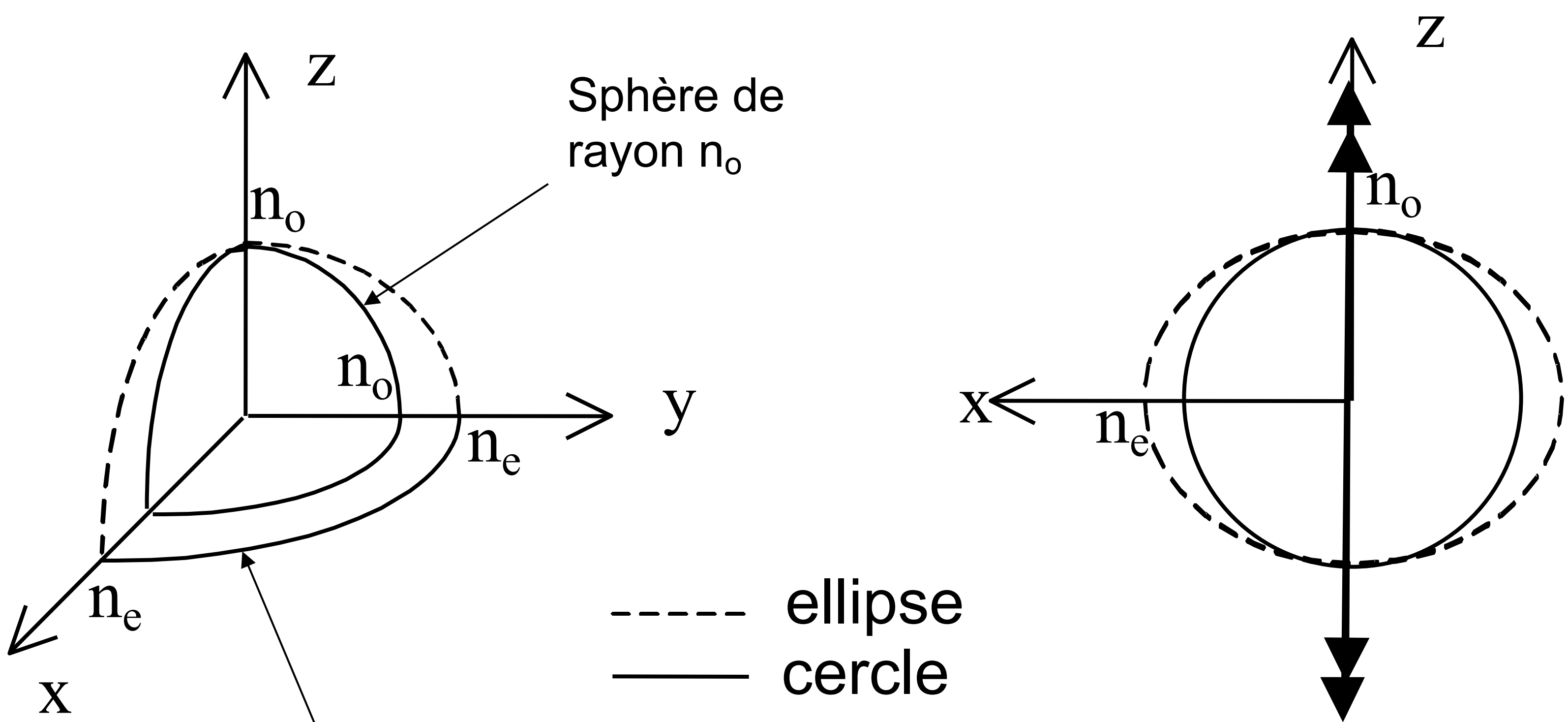
$$(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_o^2})(\frac{X^2+Y^2}{n_e^2}+\frac{Z^2}{n_o^2}-1)=0$$

sphère de rayon n_o

Ellipsoïde de révolution autour de l'axe Z

Valeur n_o suivant Z , n_e suivant X et Y

Surface des indices d’un milieu uniaxe (d’axe z)

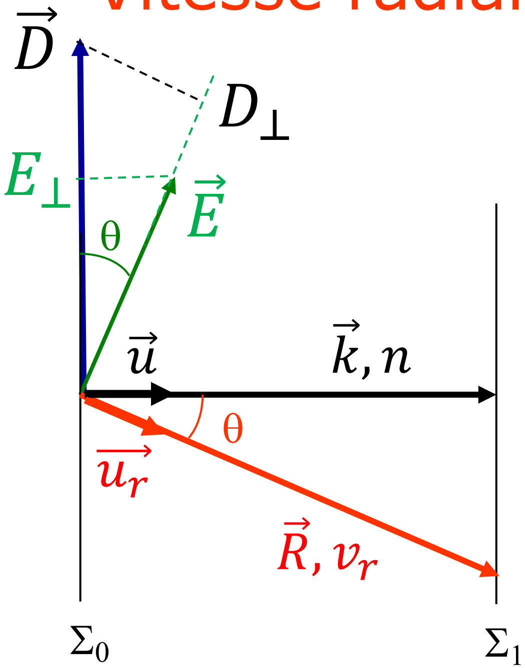


uniaxe positif $n_e > n_o$

Lien vers visualisation 3D

Notion de vitesse radiale

Vitesse radiale v_r = vitesse mesurée le long du rayon R (=vecteur de Poynting)



$$v_r = \frac{c}{n\cos\theta}$$

D peut s'écrire en fonction de la projection de E sur la normale au vecteur d'onde

$$\vec{D} = \varepsilon_0 n^2(\vec{E} - (\vec{u}.\vec{E})\vec{u}) = \varepsilon_0 n^2 \overrightarrow{E_\perp}$$

Symétriquement, E peut s'écrire en fonction de la projection de D sur la normale au rayon:

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 n^2 \, cos^2\,\theta}(\vec{D} - (\overrightarrow{u_r}.\vec{D})\overrightarrow{u_r})$$

$$\vec{E} = \frac{v_r^2}{\varepsilon_0 c^2}\overrightarrow{(D} - (\overrightarrow{u_r}.\vec{D})\overrightarrow{u_r})$$

Correspondance formelle où le couple de vecteur D et k est remplacé par le couple E et R, et où l'indice n est remplacé par la vitesse radiale v_r

=> on va retrouver des propriétés sur les rayons et les vitesses radiales similaires à celles qu'on a vu sur les vecteurs d'onde et les indices.

Surface des vitesses radiales

Définition: on porte les 2 valeurs possibles de la vitesse v_r dans la direction de R

1 direction k fixée: 2 indices n′ et n′′ pour 2 polarisations D′ et D′′.

1 couple (k, D) fixé: 1 direction R du vecteur de Poynting (ExB).

1 direction R (rayon) fixée: 2 vitesses radiales v_r' et v_r' pour 2 polarisations

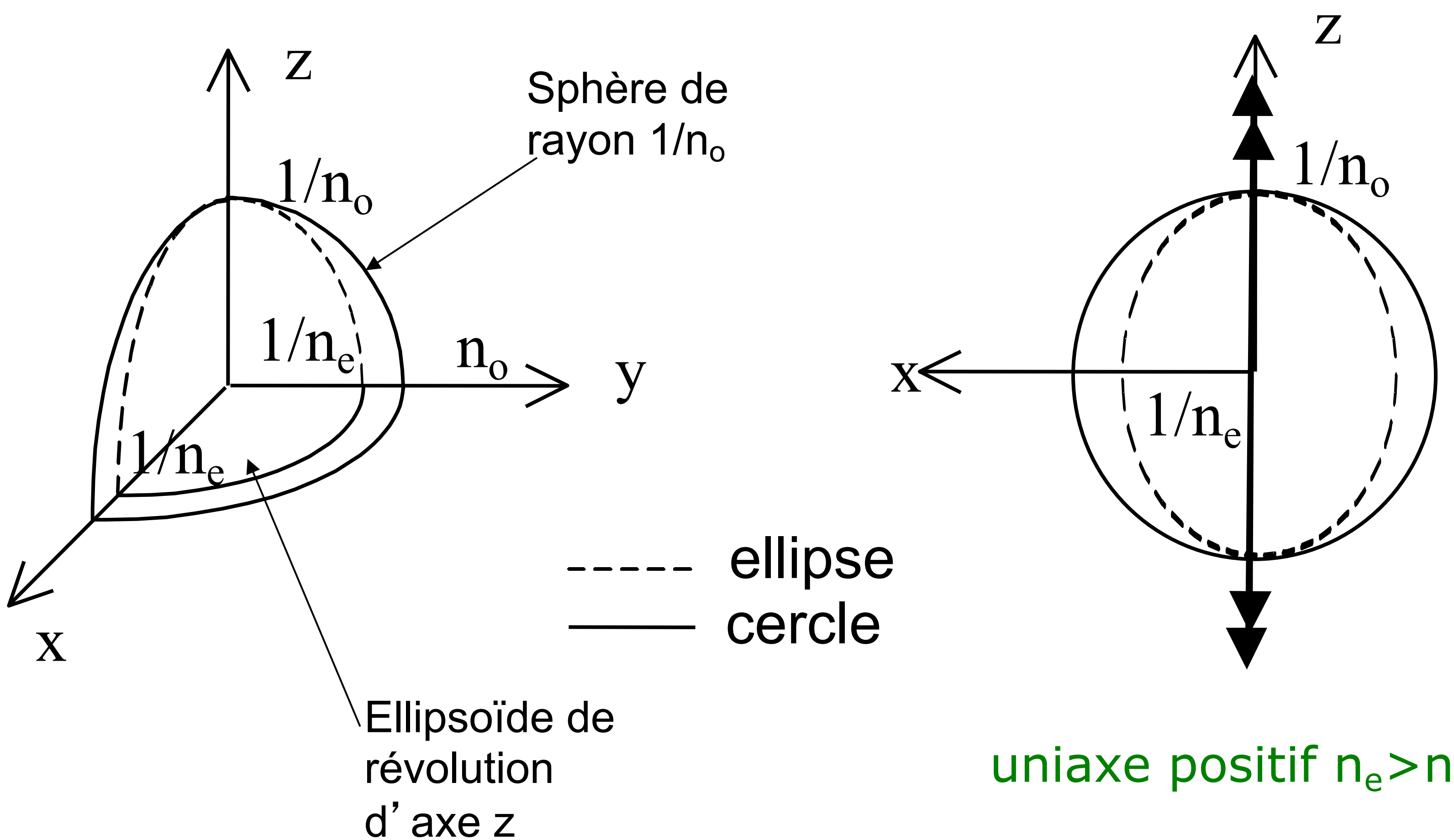
La forme de cette surface est déterminée à partir de l'équation de Fresnel aux vitesses radiales qui a la même forme que celle pour les indices en utilisant l'équivalence:

$u \Leftrightarrow u_r$ $n \Leftrightarrow v_r$ ou $1/n_r$

Pour un milieu uniaxe, la surface des vitesses radiales sera composée de:

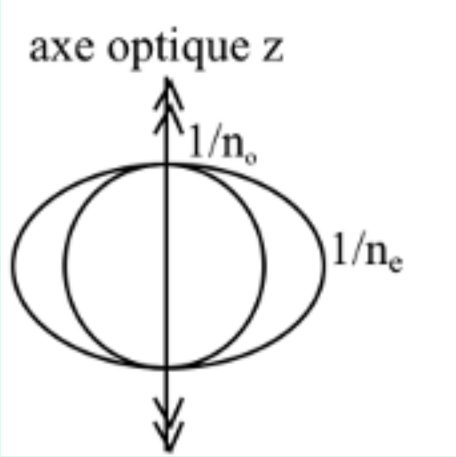
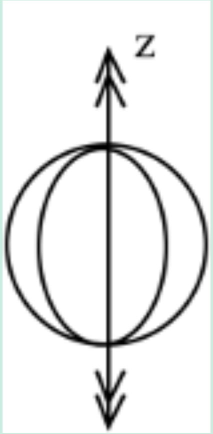
- Une sphère de rayon $1/n_o$
- Un ellipsoïde de révolution autour de l'axe Z: $1/n_o$ suivant Z , $1/n_e$ suivant X et Y

Surface des vitesses pour un milieu uniaxe (d' axe z)



uniaxe positif $n_e > n_o$

Résumé: Surfaces des vitesses radiales pour tous les milieux uniaxes

uniaxe négatif $n_e < n_o$ **Exemple: calcite** **n_o= 1,658 n_e=1,486***	**uniaxe positif $n_e > n_o$** **Exemple quartz** **n_o= 1,544 n_e=1,553***
	

* Valeurs d'indices données pour λ=589nm

Propagation dans les milieux anisotropes

1) Matériaux biréfringents, ellipsoïde des indices

2) Polarisations propres

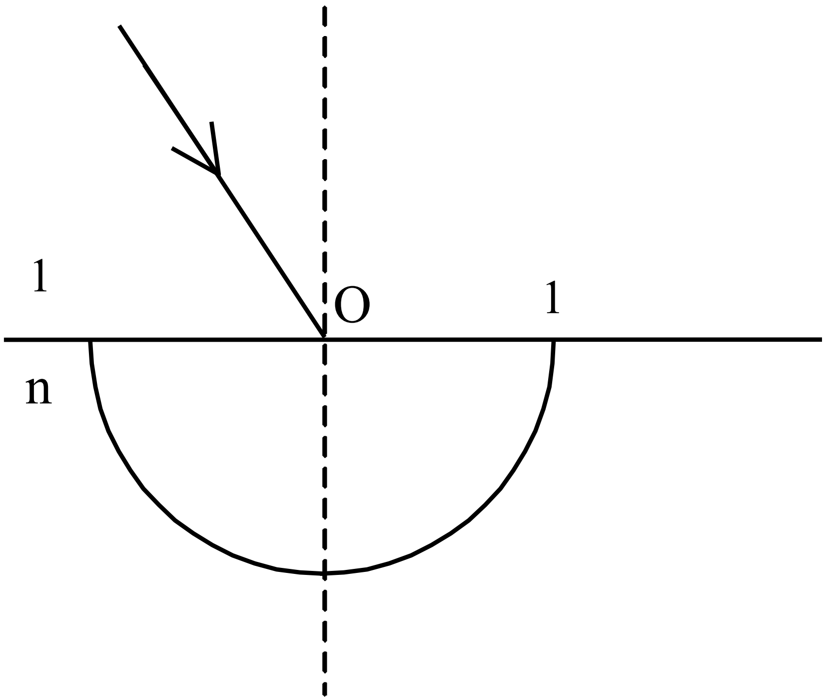
3) Vecteurs d'onde et Rayons dans un milieu uniaxe, surface des indices et surface des vitesses

4) Réfraction des rayons dans un milieu uniaxe

Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

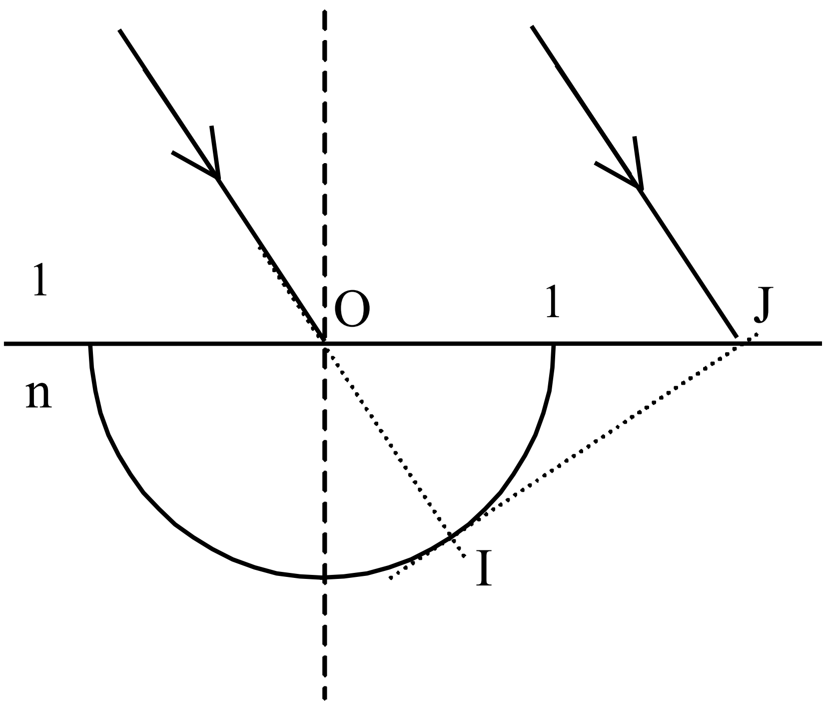
Rappel du cas isotrope



Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

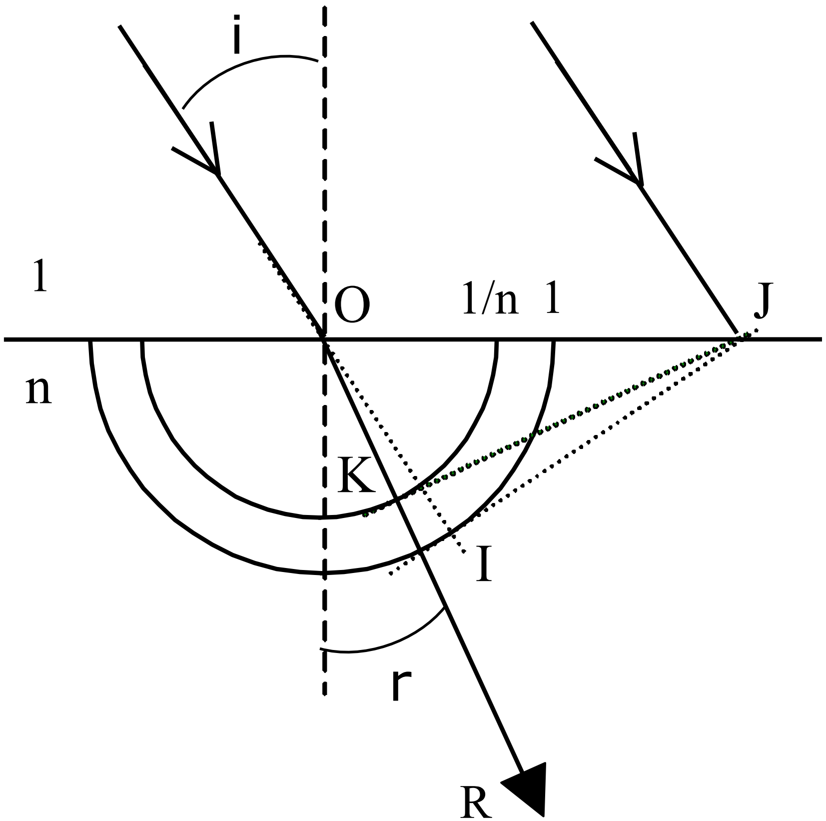
Rappel du cas isotrope



Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

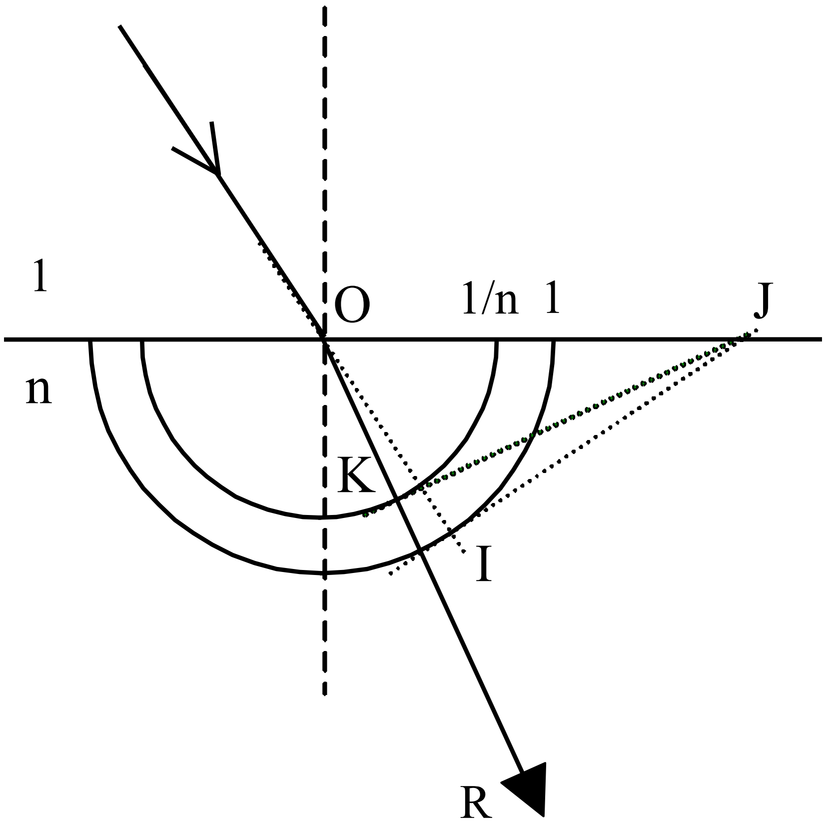
Rappel du cas isotrope



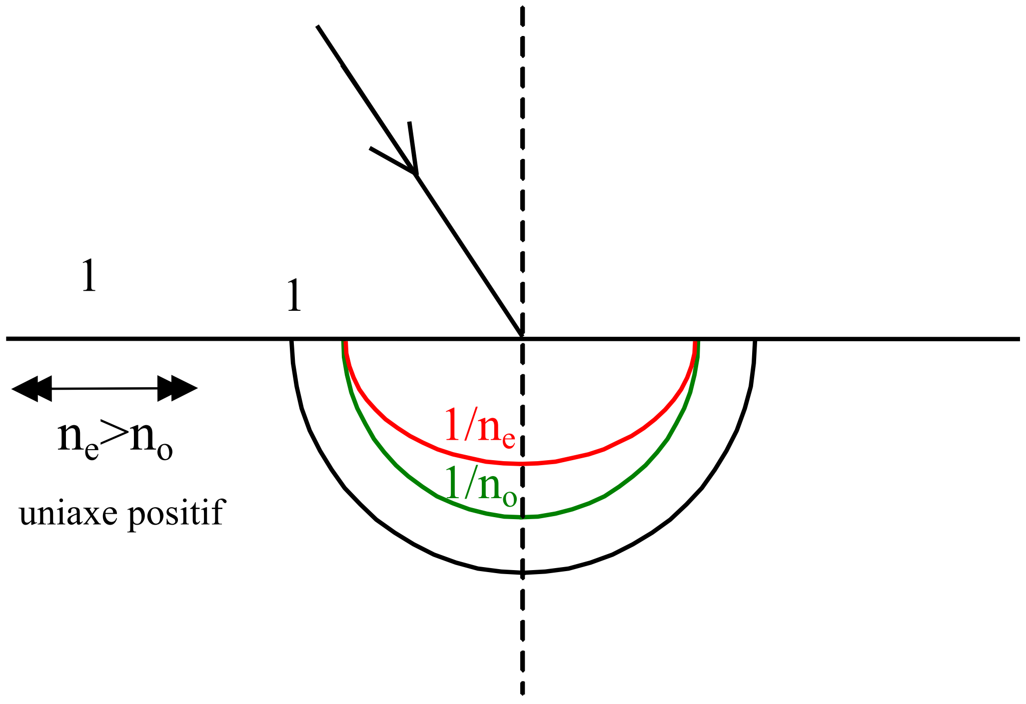
Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

Rappel du cas isotrope

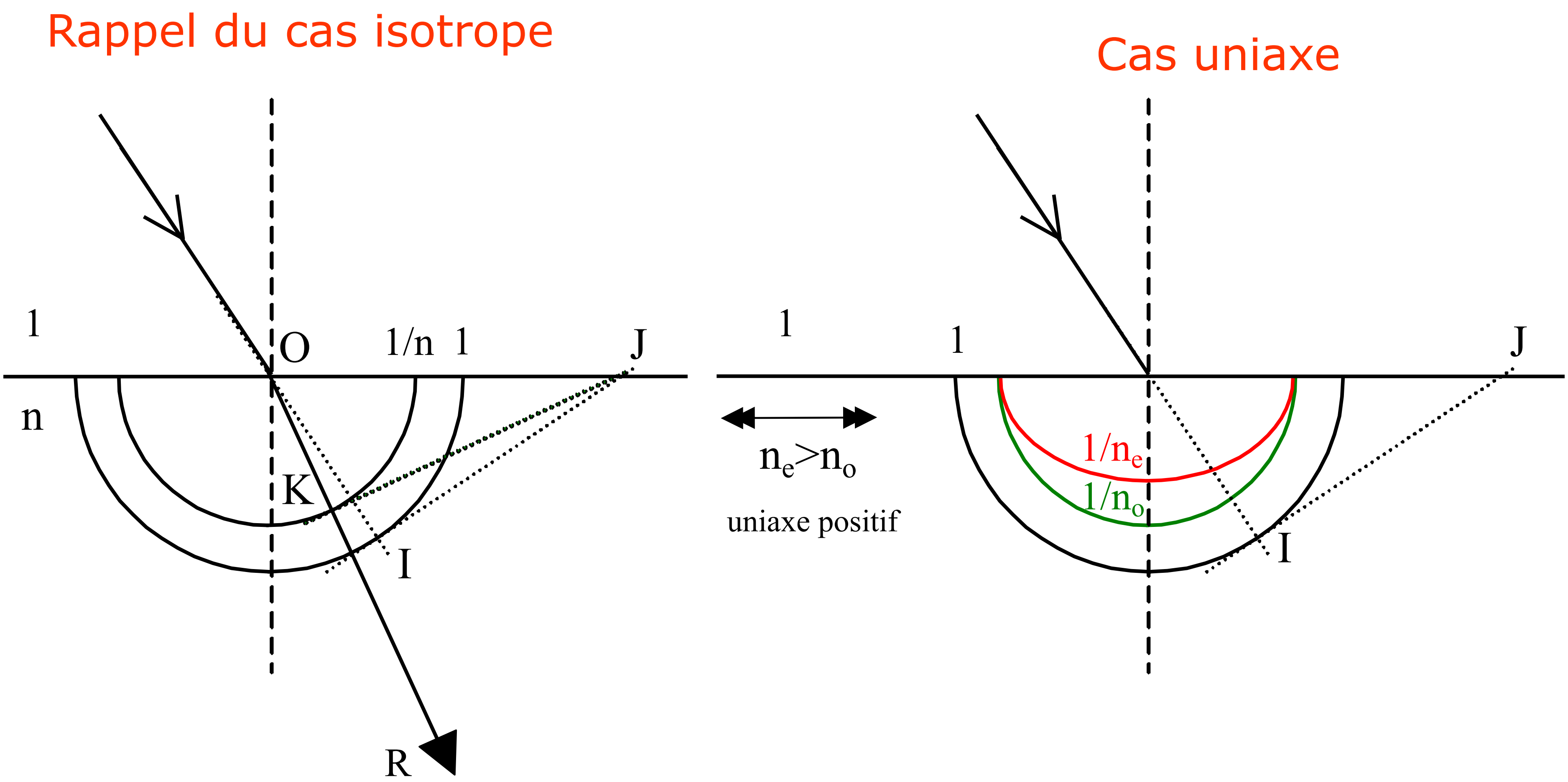


Cas uniaxe



Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

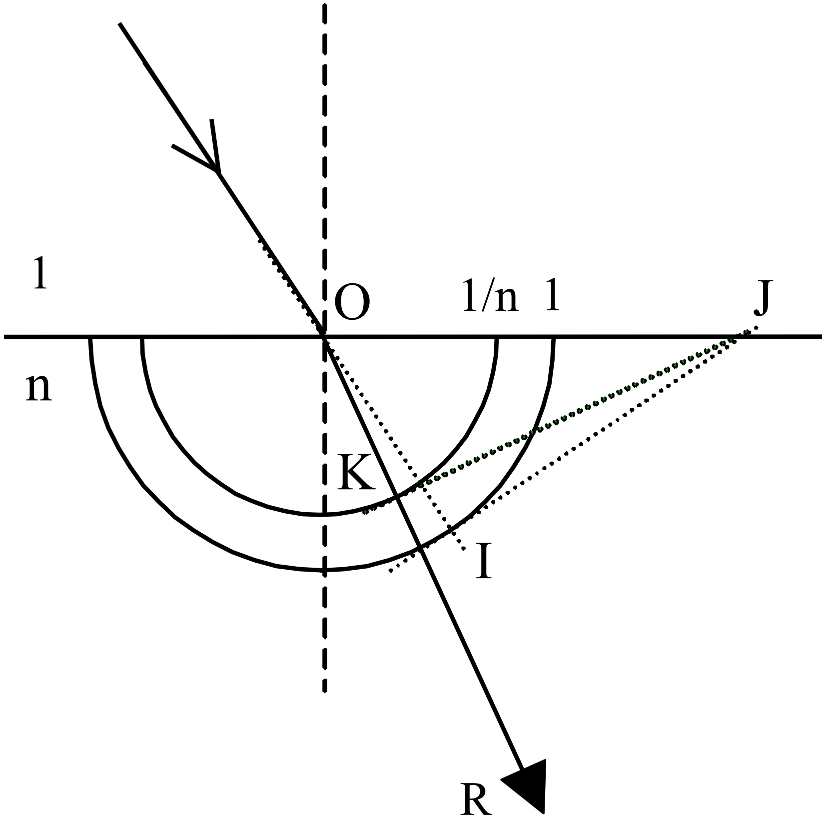
Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)



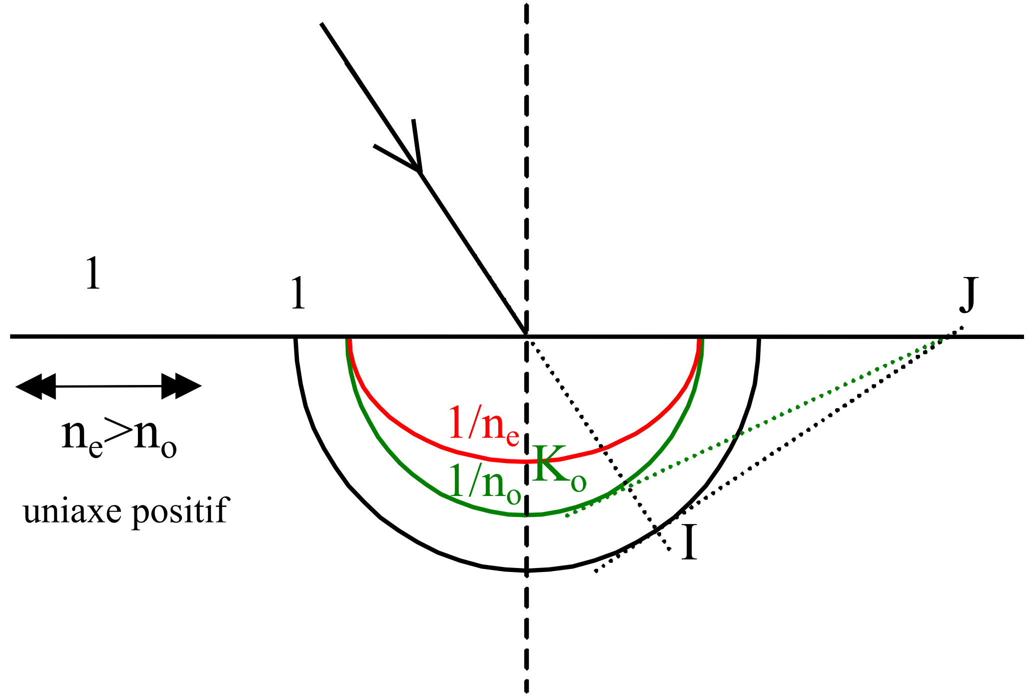
Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

Rappel du cas isotrope



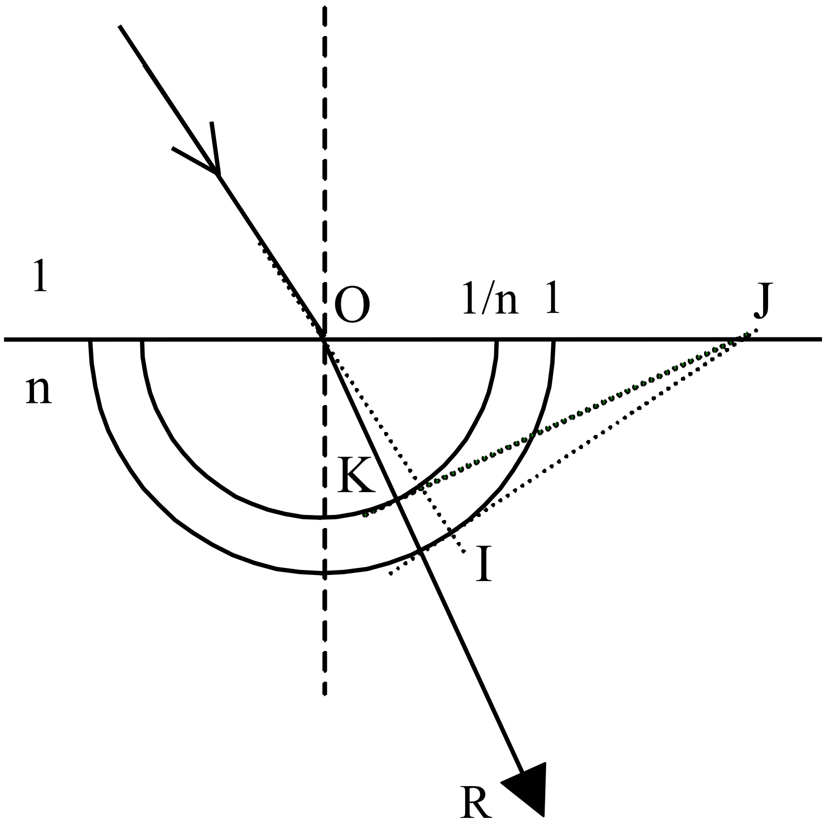
Cas uniaxe



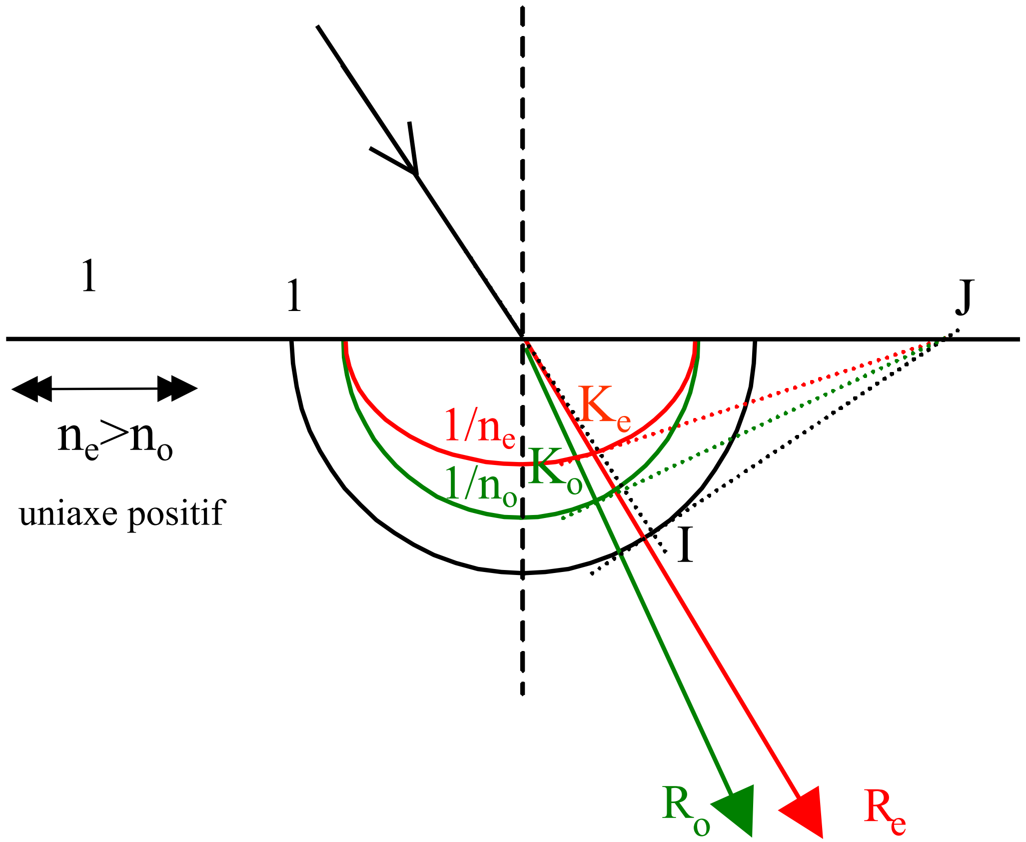
Réfraction: construction des rayons avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

Rappel du cas isotrope



Cas uniaxe



Comment trouver les vecteurs E_o D_o E_e D_e à partir des surfaces des vitesses radiales?

① E_o ORDINAIRE
- orthogonal à R_o
- orthogonal à l'axe optique

② D_o ORDINAIRE: parallèle à E_o

③ E_e EXTRAORDINAIRE:
- orthogonal à R_e
- orthogonal à E_o

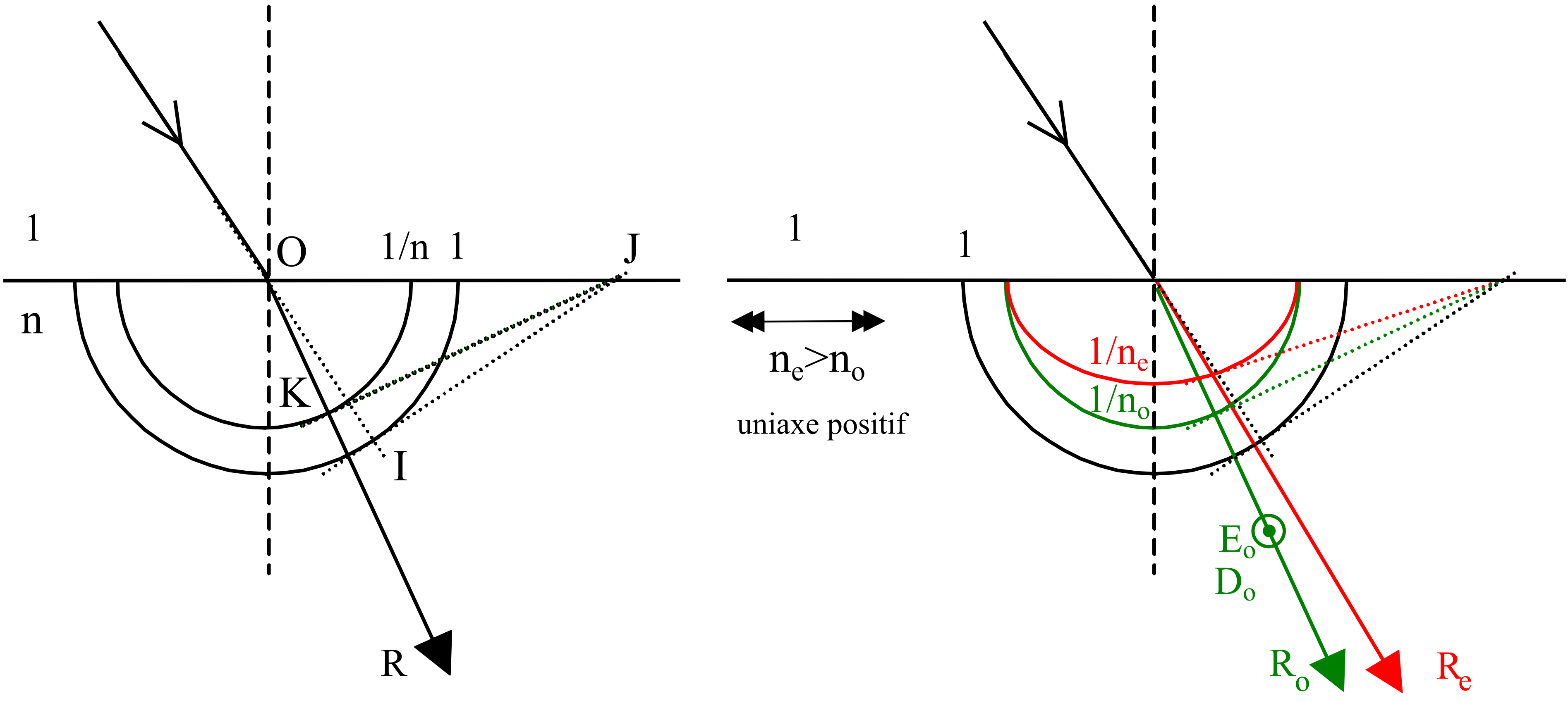
④ D_e EXTRAORDINAIRE
- tangent à la surface des vitesses extraordinaires
- dans le même plan que E_e et R_e

Réfraction: construction avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

Rappel du cas isotrope

Cas uniaxe

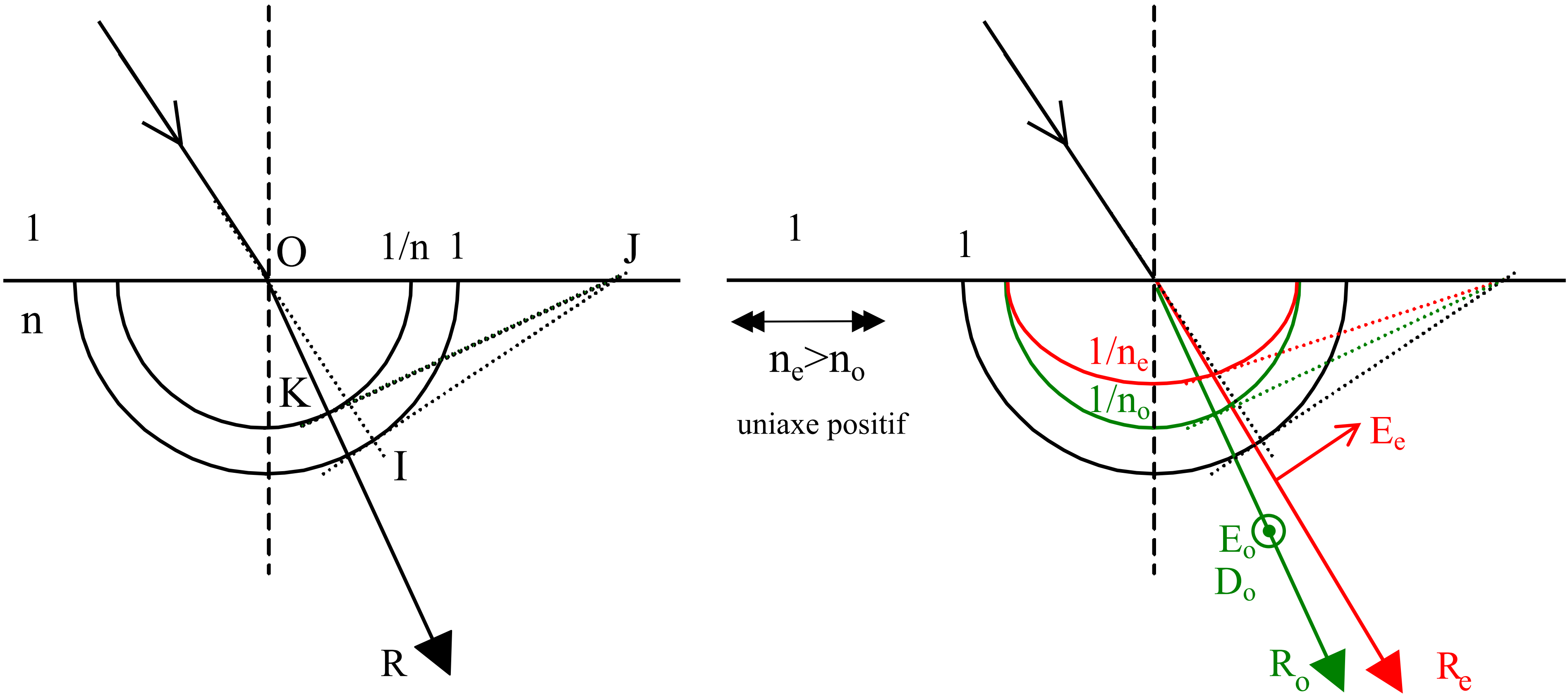


Réfraction: construction avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

Rappel du cas isotrope

Cas uniaxe



Réfraction: construction avec la surface des vitesses

Construction de type Huygens (propagation d'ondelettes sphériques)

Rappel du cas isotrope

Cas uniaxe