

Propagation dans les milieux anisotropes

Nathalie Westbrook

4 avril 2019

Historiquement, la première manifestation de l'anisotropie optique de certains cristaux comme le spath d'Islande a été l'apparition de deux images, donc d'une double réfraction. C'est pourquoi ces milieux anisotropes sont aussi appelés matériaux biréfringents.



FIGURE 1 – Double réfraction dans un cristal de spath d'Islande ou calcite

1 Matériaux biréfringents

1.1 Quelques exemples de matériaux biréfringents

Outre les cristaux comme la calcite, de nombreux matériaux présentent de la biréfringence : des matériaux naturels ou artificiels formés de fibres, ou des plastiques soumis à une déformation mécanique. L'anisotropie des tissus humains formés de fibres de collagène est utilisée en imagerie médicale, et des pathologies comme la fibrose peuvent être détectées par voie optique.



FIGURE 2 – Cristal de calcite
 CaCO_3

Particle and Fiber Identification with Polarized Light Microscopy

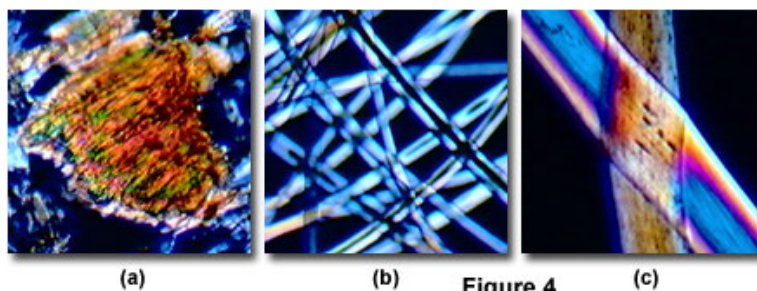


FIGURE 3 – Images au microscope polarisant de poudre de bois (a), de fibres de nylon (b) et de cheveux (c)

1.2 Comment caractérise-t-on la biréfringence d'un matériau ?

L'idée de base est qu'il existe différentes valeurs d'indice de réfraction dans le matériau en fonction de la direction de polarisation de la lumière et de sa direction de propagation. Cette propriété peut se caractériser de deux façons : la matrice de permittivité diélectrique et l'ellipsoïde des indices.

1.2.1 La matrice de permittivité diélectrique

Sous l'effet d'un champ électrique incident \vec{E} , des charges sont déplacées dans le matériau, des dipôles sont induits et il s'ensuit une polarisation macroscopique :

$$\vec{P} = \epsilon_0[\chi]\vec{E}$$

Le fait que $[\chi]$ soit une matrice et pas un scalaire traduit le fait que le matériau est anisotrope, donc que les dipôles induits ne sont pas forcément alignés avec le champ électrique excitateur. Le vecteur déplacement \vec{D} qui est la somme, à ϵ_0 près, du champ incident et de la polarisation induite s'écrit :

$$\vec{D} = \epsilon_0([I] + [\chi])\vec{E} = \epsilon_0[\epsilon]\vec{E} \quad (1)$$

$[\epsilon]$ est la matrice de permittivité diélectrique du matériau. Si le matériau ne présente pas de pertes par absorption, la matrice $[\epsilon]$ est symétrique et à coefficients réels. Elle peut donc se diagonaliser dans une base propre d'états orthogonaux (x,y,z) et s'écrire :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

On retrouve le cas d'un milieu isotrope d'indice n lorsque $n_x = n_y = n_z = n$.

1.2.2 L'ellipsoïde des indices

Dans chaque direction de polarisation, donnée par le vecteur \vec{D} , on porte la valeur de l'indice correspondant à cette polarisation : on obtient alors une surface en 3 dimensions qui a une forme d'ellipsoïde (cf figure 4). Cette ellipsoïde des indices est une autre façon de caractériser un matériau biréfringent. Son équation s'écrit :

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (3)$$

On peut représenter graphiquement cet ellipsoïde par des coupes dans les plans Oxz et Oyz (voir figure 4).

1.2.3 Lien entre ces deux descriptions par l'équation de propagation

Revenons à la relation entre D et E donnée par les équations (1) et (2) :

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

On voit que si \vec{E} est parallèle à Ox ($E_y = E_z = 0$) alors \vec{D} est aussi parallèle à Ox et l'indice vu pour cette direction de \vec{D} est n_x . On est bien en accord avec l'équation (3) de l'ellipsoïde des indices : en prenant $y = z = 0$, on retrouve bien $x = n_x$. Le même raisonnement s'applique

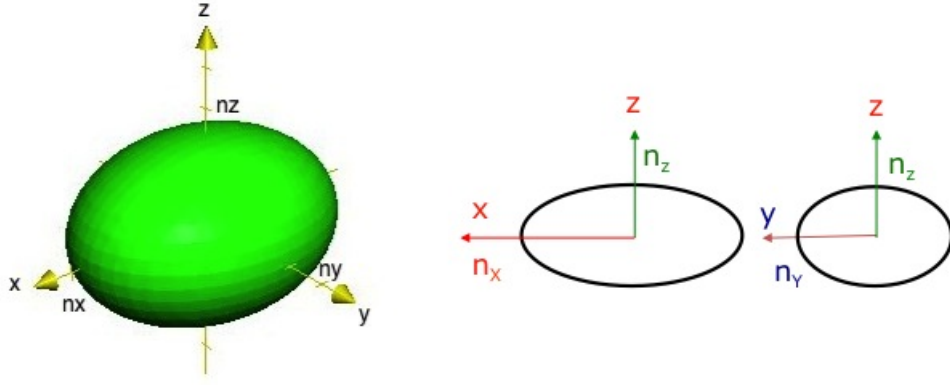


FIGURE 4 – Allure 3D et coupes 2D de l'ellipsoïde des indices

aux directions de \vec{D} parallèles à y (indice n_y) et z (indice n_z). Pour les autres directions de \vec{D} , on va utiliser l'équation de propagation.

Rappel sur l'équation de propagation

Dans un milieu non magnétique sans sources, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (5)$$

On cherche une solution sous la forme d'une onde plane de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (6)$$

Les équations de Maxwell se récrivent alors :

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 = 0 \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D} \quad (7)$$

En combinant ces équations, on peut obtenir l'équation de propagation :

$$\vec{D} = -\frac{1}{\mu_0 \omega^2} \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u}]$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 n^2 [\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{u}]} \quad (8)$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire dans la direction de \vec{k} : $\vec{k} = k \vec{u}$.

En multipliant scalairement l'équation de propagation (8) par \vec{D} , on obtient :

$$\frac{D^2}{n^2} = \epsilon_0 \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2} \quad (9)$$

Si maintenant on considère un point M de l'ellipsoïde des indices, le vecteur qui relie ce point au centre O de l'ellipsoïde peut s'écrire :

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z) = n \frac{\vec{D}}{D} \quad \text{d'où} \quad x = n \frac{D_x}{D} \quad (\text{idem pour } y \text{ et } z)$$

En remplaçant D_x , D_y et D_z par leurs expressions en fonction de x , y et z dans l'équation (9), et en divisant par $\frac{D^2}{n^2}$, on retrouve l'équation de l'ellipsoïde des indices donnée en (3).

2 Polarisation propres et indices associés

2.1 Equation aux valeurs propres sur le vecteur \vec{D}

Pour qu'une onde puisse se propager dans un milieu biréfringent, il faut qu'elle satisfasse :

1) aux équations de Maxwell, donc à l'équation de propagation (8) reliant \vec{D} et \vec{E} pour une direction \vec{u} donnée

2) aux propriétés du matériau, qui imposent un lien entre \vec{D} et \vec{E} via la matrice $[\epsilon]$ (eq. 4)

Dans un milieu isotrope, la permittivité est un scalaire et le vecteur \vec{D} est parallèle au vecteur \vec{E} , donc toujours perpendiculaire au vecteur $\vec{k} = k\vec{u}$. Le terme en $\vec{u} \cdot \vec{E}$ dans l'équation de propagation est nul, et donc les deux conditions sont toujours remplies. Toute direction de polarisation peut donc se propager avec l'indice n .

Dans un milieu anisotrope, on a deux conditions à remplir qui s'écrivent sous une forme matricielle :

1) l'équation de propagation :

$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 (\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u}) = \epsilon_0 n^2 (\vec{E} - [P^{\vec{u}}] \vec{E}) = \epsilon_0 n^2 [P_{\perp}^{\vec{u}}] \vec{E} \quad (10)$$

où $[P^{\vec{u}}]$ est la matrice de projection sur \vec{u} et $[P_{\perp}^{\vec{u}}]$ est la matrice de projection sur le plan perpendiculaire à \vec{u} (appelé plan d'onde).

2) la relation entre \vec{E} et \vec{D} que l'on peut écrire à partir de l'inverse de la matrice permittivité :

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\epsilon]^{-1} \vec{D} \quad (11)$$

Dans la base propre du matériau, l'inverse de la matrice permittivité s'écrit simplement :

$$[\epsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n_z^2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

En combinant les deux conditions (10) et (11), on obtient :

$$\boxed{\frac{\vec{D}}{n^2} = [P_{\perp}^{\vec{u}}] [\epsilon]^{-1} \vec{D} = [A_{\vec{u}}] \vec{D}} \quad (13)$$

C'est une équation aux valeurs propres pour la matrice $[A_{\vec{u}}]$ qui dépend de la direction fixée pour le vecteur \vec{u} , donc pour le vecteur d'onde \vec{k} . Les vecteurs propres de cette matrice sont les polarisations propres qui peuvent se propager sans déformation à travers le matériau pour cette direction de \vec{u} . Les valeurs propres $\frac{1}{n^2}$ donnent les indices n associés à ces polarisations propres. Eux aussi dépendent donc de la direction \vec{u} .

2.2 Propriétés des polarisations propres

Il s'agit donc de déterminer les vecteurs propres de la matrice $[A_{\vec{u}}]$ de dimension 3x3. A priori on attend trois valeurs propres mais nous allons voir qu'une d'entre elles est nulle. Pour cela écrivons cette matrice dans un repère associé à la direction \vec{u} , à savoir une base constituée du vecteur \vec{u} lui-même et de deux vecteurs orthogonaux \vec{v} et \vec{w} dans le plan d'onde (perpendiculaire

à \vec{u}). Dans cette base la matrice $[P_{\perp}^{\vec{u}}]$ est diagonale et sa première colonne ne contient que des zéros. Par contre la matrice $[\epsilon]^{-1}$ n'est elle plus diagonale, mais elle reste symétrique et à coefficients réels. On peut donc écrire $[A_{\vec{u}}]$ sous la forme :

$$[A_{\vec{u}}] = [P_{\perp}^{\vec{u}}][\epsilon]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \# & \# & \# \\ \# & a & c \\ \# & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \# & a & c \\ \# & c & b \end{bmatrix} \quad (14)$$

Le fait que la première ligne de $[A_{\vec{u}}]$ soit uniquement composée de zéros signifie que seule la restriction de $[A_{\vec{u}}]$ au plan d'onde joue un rôle. Ce n'est pas étonnant puisqu'on sait que les vecteurs \vec{D} sont forcément perpendiculaires à \vec{u} donc contenus dans le plan d'onde. On est donc ramené à la recherche de deux vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice 2x2 symétrique et à coefficients réels, ce qui implique :

- 2 valeurs propres réelles $\frac{1}{n'^2}$ et $\frac{1}{n''^2}$ (on verra plus loin qu'elles sont forcément positives),
- 2 vecteurs propres orthogonaux \vec{D}' et \vec{D}'' à coefficients réels.

Le fait que les vecteurs propres sont à coefficients réels signifie que ce sont des polarisations linéaires (les polarisations circulaires ou elliptiques sont à coefficients complexes, c'est ce qu'on a vu lors de l'étude des vecteurs de Jones). Notons que cette matrice réduite 2x2 dont les polarisations propres sont les vecteurs propres est en fait à un facteur près la matrice de Jones du système.

En conclusion, pour une direction de propagation \vec{u} dans un milieu biréfringent, il existe deux polarisations propres et elles sont linéaires et orthogonales.

2.3 Orientation des différents vecteurs par rapport à \vec{D}

Dans un milieu isotrope :

- \vec{E} et \vec{D} sont parallèles et transverses (perpendiculaires au vecteur d'onde \vec{k}),
- \vec{B} et \vec{H} leur sont orthogonaux et transverses,
- le vecteur de Poynting $\vec{R} \propto \vec{E} \times \vec{H}$, direction de propagation de l'énergie (correspondant au rayon), est orthogonal à \vec{E} et \vec{H} , donc parallèle à \vec{k} .

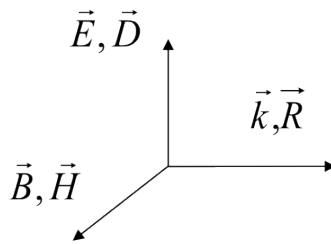


FIGURE 5 – Onde dans un milieu isotrope

Dans un milieu anisotrope :

- \vec{E} et \vec{D} ne sont plus parallèles en général,
- \vec{R} vecteur de Poynting, direction du rayon lumineux, n'est plus parallèle au vecteur d'onde \vec{k} (direction de propagation de la phase),
- \vec{D} , \vec{E} , \vec{R} et \vec{k} sont dans le plan de polarisation (perpendiculaire à \vec{B} et \vec{H}),
- \vec{D} reste orthogonal à \vec{k} , \vec{E} orthogonal à \vec{R} .

A retenir sur la propagation des ondes dans un milieu anisotrope :

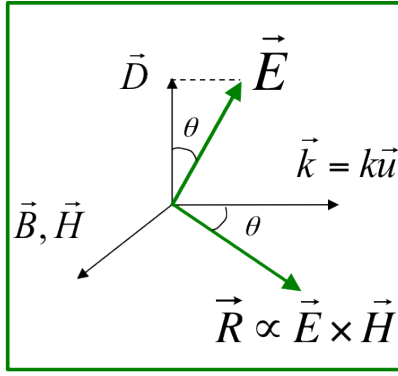


FIGURE 6 – Onde dans un milieu anisotrope

- 1) Dans un milieu anisotrope, l'indice vu par une onde dépend de sa polarisation ;
- 2) La position relative des différents vecteurs caractérisant une onde plane dans un milieu anisotrope est donnée par la figure 6 ;
- 3) Les deux polarisations pouvant se propager sans déformation et les indices correspondants dépendent de la direction de propagation \vec{u} ;
- 4) Les polarisations propres sont orthogonales.

2.4 Détermination des polarisations propres à partir de l'ellipsoïde des indices

Nous allons voir comment on peut utiliser l'ellipsoïde des indices pour retrouver toutes les propriétés d'une onde se propageant dans un milieu anisotrope.

Montrons tout d'abord qu'on peut retrouver la direction du champ \vec{E} à partir de cet ellipsoïde. Pour une direction de \vec{D} repérée par un point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) sur l'ellipsoïde des indices, la direction \vec{E} est donnée via la matrice permittivité par :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} D_x/n_x^2 \\ D_y/n_y^2 \\ D_z/n_z^2 \end{bmatrix} = \frac{D}{\epsilon_0 n} \begin{bmatrix} x_0/n_x^2 \\ y_0/n_y^2 \\ z_0/n_z^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Or le vecteur normal à l'ellipsoïde des indices au point (x_0, y_0, z_0) s'écrit justement :

$$\begin{bmatrix} x_0/n_x^2 \\ y_0/n_y^2 \\ z_0/n_z^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

On a donc montré que pour une direction de \vec{D} fixée par un point M sur l'ellipsoïde des indices, \vec{E} est normal à l'ellipsoïde au point M. Le champ magnétique \vec{B} , qui doit être orthogonal à \vec{D} et \vec{E} , est donc tangent à l'ellipsoïde en ce point M.

A partir de ces propriétés on peut retrouver les polarisations propres pour une direction de propagation \vec{k} donnée. On sait que :

- \vec{D} est dans le plan d'onde (orthogonal à \vec{k}) donc à l'intersection de l'ellipsoïde des indices et du plan orthogonal à \vec{k} , ce qui définit une ellipse ;
- \vec{B} est dans le plan d'onde donc dans le plan de cette ellipse, et tangent à l'ellipsoïde ;
- \vec{D} est orthogonal à \vec{B} .

Les seules possibilités pour les polarisations propres \vec{D}' et \vec{D}'' sont donc les deux axes de l'ellipse (cf figure 7).

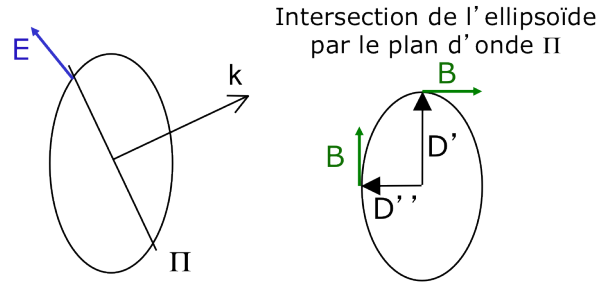


FIGURE 7 – Détermination des polarisations propres à partir de l'ellipsoïde des indices dans le cas général (biaxe)

Dans le cas particulier d'un milieu uniaxe, l'ellipsoïde des indices est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique z , d'équation :

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1 \quad (17)$$

Lorsqu'on coupe cet ellipsoïde par le plan d'onde, l'ellipse obtenue a toujours un des ses axes qui a une longueur n_o et qui est perpendiculaire à l'axe optique : c'est la polarisation ordinaire, toujours perpendiculaire à l'axe optique z . Le champ \vec{E}_o correspondant, normal à l'ellipsoïde, est dans la même direction que \vec{D}_o . L'autre polarisation propre est dans le plan contenant l'axe optique, l'indice qui lui correspond est intermédiaire entre n_o et n_e . \vec{D}_e est suivant l'axe de l'ellipse et \vec{E}_e est suivant la normale, dans le même plan que \vec{k} et \vec{D}_e . On trouve donc que \vec{E}_e et \vec{E}_o sont orthogonaux, tout comme \vec{D}_o et \vec{D}_e .

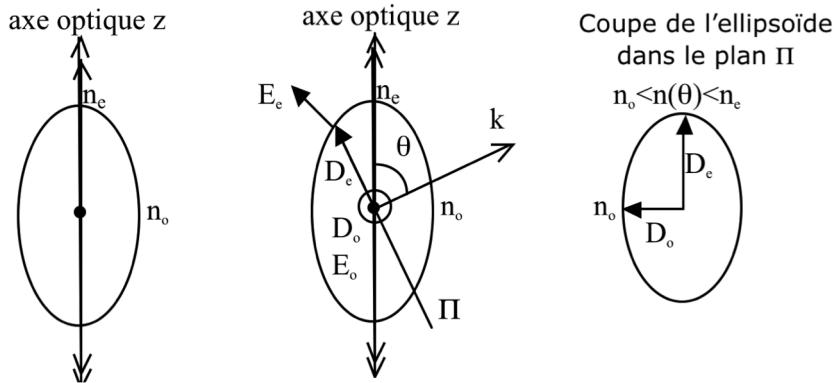


FIGURE 8 – Détermination des polarisations propres à partir de l'ellipsoïde des indices pour un milieu uniaxe

3 Propagation des rayons et des vecteurs d'onde dans un milieu uniaxe

Dans cette partie nous allons nous intéresser aux valeurs propres associées aux polarisations propres, et nous verrons qu'on peut les représenter en fonction de la direction du vecteur d'onde sous la forme de la surface des indices. Par analogie, nous définirons ce même type de surface pour les rayons, qui sera appelée surface des vitesses radiales. Celle-ci nous sera très utile pour construire la double réfraction des rayons dans un milieu anisotrope.

3.1 Equation de Fresnel

Pour une direction du vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$, on a vu qu'il existait deux polarisations propres solutions de l'équation aux valeurs propres (13). On cherche maintenant les deux valeurs d'indices possibles pour cette direction de propagation : $n'(\vec{u})$ et $n''(\vec{u})$

Pour les déterminer, il faut résoudre l'équation aux valeurs propres (13) donc trouver les solutions $\frac{1}{n^2}$ qui vérifient :

$$\det\{[A_{\vec{u}}] - \frac{1}{n^2}[I]\} = 0 \quad (18)$$

Pour calculer le déterminant de cette matrice 3x3 en fonction de la direction de \vec{u} , on se place dans la base des états propres du matériau, dans laquelle les matrices $[\epsilon]$ et $[\epsilon]^{-1}$ sont diagonales. Dans cette base, le tenseur $[\epsilon]^{-1}$ est donné par l'équation (12). Pour une direction quelconque du vecteur d'onde, on peut écrire le vecteur unitaire \vec{u} dans cette direction sous la forme :

$$[\vec{u}] = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (19)$$

A partir de là, on peut écrire la matrice de la projection sur le plan perpendiculaire à \vec{u} :

$$[P_{\perp}^{\vec{u}}] = [I] - [P^{\vec{u}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} [\alpha \ \beta \ \gamma] = \begin{bmatrix} 1 - \alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1 - \beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1 - \gamma^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

On obtient la matrice $[A_{\vec{u}}]$ en multipliant $[P_{\perp}^{\vec{u}}]$ par $[\epsilon]^{-1}$, et finalement l'équation (18) s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1-\alpha^2}{n_x^2} - \frac{1}{n^2}\right) & \frac{-\alpha\beta}{n_y^2} & \frac{-\alpha\gamma}{n_z^2} \\ \frac{-\alpha\beta}{n_x^2} & \left(\frac{1-\beta^2}{n_y^2} - \frac{1}{n^2}\right) & \frac{-\beta\gamma}{n_z^2} \\ \frac{-\alpha\gamma}{n_x^2} & \frac{-\beta\gamma}{n_y^2} & \left(\frac{1-\gamma^2}{n_z^2} - \frac{1}{n^2}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

On obtient une équation avec des termes en $\frac{1}{n^6}$, $\frac{1}{n^4}$ et $\frac{1}{n^2}$. Le terme indépendant de n s'annule, ce qui est lié au fait que $\det[A_{\vec{u}}] = 0$, comme on peut le voir d'après l'équation (14). On retrouve le fait qu'il n'y aura que deux valeurs propres, la 3e étant nulle. On obtient finalement une équation du second degré en $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{1}{n^4} - \frac{1}{n^2} \left(\frac{(\beta^2 + \gamma^2)}{n_x^2} + \frac{(\gamma^2 + \alpha^2)}{n_y^2} + \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{n_z^2} \right) + \frac{\alpha^2}{n_y^2 n_z^2} + \frac{\beta^2}{n_z^2 n_x^2} + \frac{\gamma^2}{n_x^2 n_y^2} = 0 \quad (22)$$

Cette équation est du type $\frac{1}{n^4} - S\frac{1}{n^2} + P = 0$, avec S et P positifs, . Les deux solutions n'^2 et n''^2 , dont on a déjà montré qu'elles étaient réelles, sont positives, puisque leur somme S et leur produit P sont positifs. On obtient donc deux solutions n' et n'' qui sont réelles, ce qui correspond bien à une propagation sans absorption (hypothèse de départ). Après quelques lignes de calcul, cette équation peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) + \beta^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2} \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2} \right) = 0 \quad (23)$$

Cette équation s'appelle l'équation de Fresnel aux indices, et ses solutions sont les indices propres $n'(\vec{u})$ et $n''(\vec{u})$ pour une direction de propagation caractérisée par les coefficients (α, β, γ) .

3.2 Surface des indices

La surface des indices est une représentation graphique des indices vus par une onde pour une direction de propagation donnée. A partir d'un point origine O, on porte les deux valeurs possibles de l'indice n dans la direction du vecteur d'onde \vec{k} .

Les points N de cette surface vérifient donc : $\overrightarrow{ON} = n(\vec{u})\vec{u}$. Cette surface comporte deux nappes, puisqu'il y a deux valeurs possibles de n pour chaque direction \vec{u} . En reprenant les notations précédentes pour les coordonnées du vecteur u, on a : $\overrightarrow{ON} = (X = n\alpha, Y = n\beta, Z = n\gamma)$ avec $X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2$. L'équation de Fresnel aux indices devient alors :

$$X^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2}\right) + Y^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2}\right) + Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2}\right)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}\right) = 0 \quad (24)$$

C'est une surface à deux nappes assez complexe dans le cas général où $n_x \neq n_y \neq n_z$.

Commençons donc par étudier le cas où $n_x = n_y = n_o$. On note alors $n_z = n_e$. On peut récrire l'équation de la surface des indices sous la forme :

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2}\right)\left((X^2 + Y^2)\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_e^2}\right) + Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2}\right)\right) = 0 \quad (25)$$

que l'on peut récrire, en utilisant $X^2 + Y^2 + Z^2 = n^2$:

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2}\right)\left(\frac{X^2 + Y^2}{n_e^2} + \frac{Z^2}{n_o^2} - 1\right) = 0 \quad (26)$$

La solution $n = n_o$ est valable pour toutes les directions de propagation et donne une sphère de rayon n_o . Le second terme $\frac{X^2+Y^2}{n_e^2} + \frac{Z^2}{n_o^2} = 1$ est l'équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe Z qui vaut n_o dans la direction Z et $n = n_e$ dans toutes les directions perpendiculaires à Z. Pour une propagation dans la direction Z, on n'a donc qu'une seule valeur d'indice possible : $n = n_o$. C'est l'axe optique du milieu, appelé milieu uniaxe. La figure 9 présente cette surface des indices dans un milieu uniaxe positif, c'est-à-dire pour lequel $n = n_e$ est plus grand que $n = n_o$.

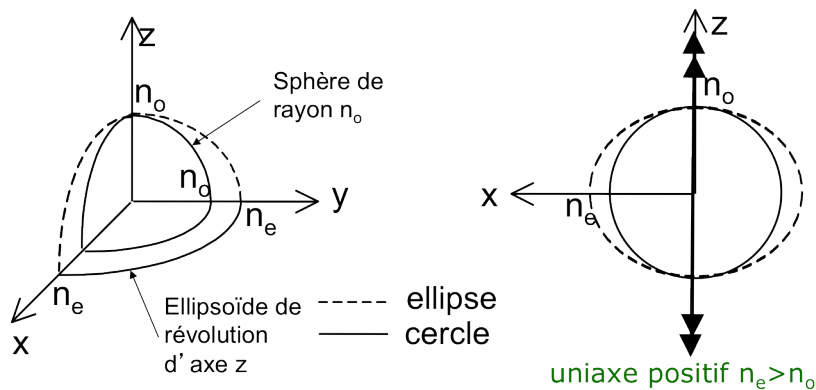


FIGURE 9 – Surface des indices dans un milieu uniaxe avec deux indices $n_x = n_y = n_o < n_z = n_e$. Elle est constituée d'une sphère de rayon n_o et d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe z, axe optique du matériau.

Revenons maintenant au cas général où les trois indices propres sont différents, par exemple $n_x < n_y < n_z$. On va retrouver les formes simples du cas uniaxe uniquement dans les plans

de coupe de la surface avec les plans $X = 0$, $Y = 0$ et $Z = 0$. Par exemple dans le plan Oxz ($Y = 0$), on obtient :

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}\right)\left(\frac{X^2}{n_z^2} + \frac{Z^2}{n_x^2} - 1\right) = 0 \quad (27)$$

Comme on est dans un plan de coupe, on obtient un cercle $n = n_y$ pour l'annulation du premier terme et une ellipse de grand axe $X = n_z$ et de petit axe $Z = n_x$ pour le 2e terme. Par permutations circulaires, on peut reconstruire les trois intersections pour les trois plans. La façon dont ces intersections se connectent est représentée sur la figure 10. Il faut imaginer l'allure globale avec deux nappes qui se rejoignent en 4 points dans les directions ON et ON' représentée sur la partie droite de la figure. Ce sont les seules directions de propagation pour lesquelles il n'y a qu'un seul indice, correspondant à la valeur intermédiaire entre les 3 indices propres du milieu. Ces deux directions sont les axes optiques du milieu, que l'on appelle un milieu biaxe.

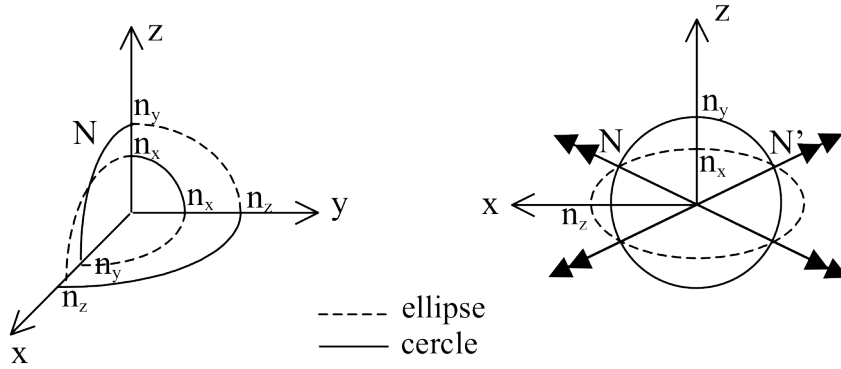


FIGURE 10 – Surface des indices dans un milieu avec trois indices $n_x < n_y < n_z$: surface complexe à deux nappes dont on a représenté ici uniquement les coupes dans les plans Oxy , Oxz et Oyz . La figure de droite dans le plan Oxz montre qu'il existe deux directions ON et ON' pour lesquelles il n'y a qu'un seul indice, ici n_y . C'est pourquoi on l'appelle un milieu biaxe.

3.3 Surface des vitesses radiales ou surface d'onde

On vient de voir que pour une direction de propagation \vec{k} fixée, on avait deux indices possibles n' et n'' associés à deux polarisations propres \vec{D}' et \vec{D}'' . Pour chacun des couples (\vec{k}, \vec{D}) fixé, on a une direction \vec{R} du vecteur de Poynting ($\vec{E} \times \vec{B}$), qui est la direction du rayon. De façon similaire, si on choisit une direction de rayon \vec{R} , on aura deux vitesses radiales v'_r et v''_r pour 2 polarisations \vec{E}' et \vec{E}'' . Le lien entre vitesse radiale comptée le long du rayon et vitesse normale comptée le long du vecteur d'onde est illustré sur la figure 11.

La surface des vitesses radiales est une représentation graphique des vitesses radiales le long d'une direction de rayon donnée. A partir d'un point origine O , on porte les deux valeurs possibles de la vitesse v_r dans la direction du rayon $\vec{R}(\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$. La forme de cette surface est déterminée à partir de l'équation de Fresnel aux vitesses radiales que l'on ne démontre pas ici mais qui est similaire à celle pour les indices :

$$\frac{\alpha_R^2 v_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{\beta_R^2 v_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{\gamma_R^2 v_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0 \quad (28)$$

avec $v_x = \frac{c}{n_x}$, $v_y = \frac{c}{n_y}$ et $v_z = \frac{c}{n_z}$. On a une surface à deux nappes très similaire à la surface des indices, mais avec les points caractéristiques sur les axes repérés par $\frac{c}{n_i}$ ou encore $\frac{1}{n_i}$.

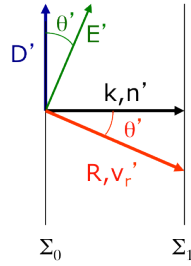


FIGURE 11 – Définition de la vitesse radiale : $v_r = c/n \cos \theta$

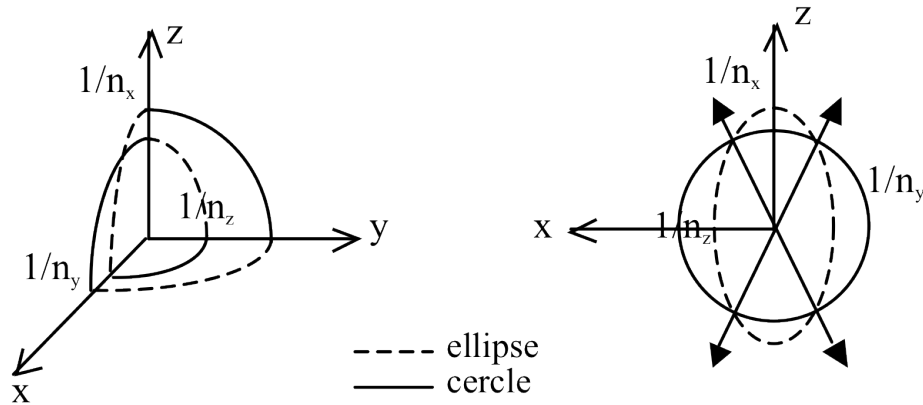


FIGURE 12 – Surface des vitesses dans un milieu biaxe avec $n_x < n_y < n_z$: surface complexe à deux nappes dont on a représenté ici uniquement les coupes dans les plans Oxy, Oxz et Oyz. La figure de droite dans le plan Oxz montre qu'il existe deux directions de rayons pour lesquelles il n'y a qu'une seule vitesse, ici $\frac{1}{n_y}$.

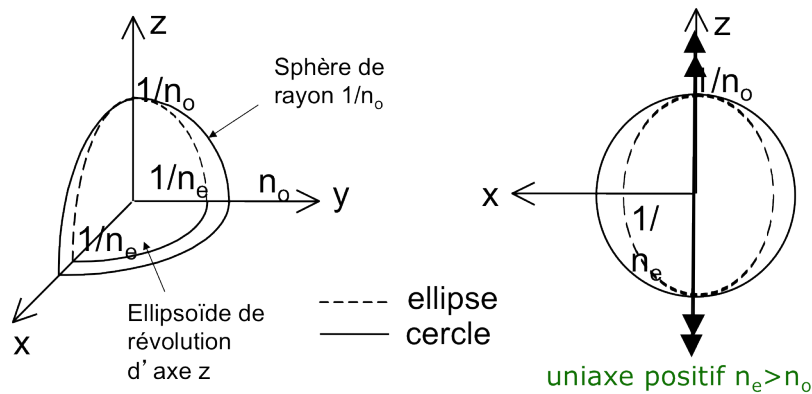


FIGURE 13 – Surface des vitesses dans un milieu uniaxe avec deux indices $n_x = n_y = n_o < n_z = n_e$. Elle est constituée d'une sphère de rayon $\frac{1}{n_o}$ et d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe z , axe optique du matériau.

3.4 Résumé des propriétés des surfaces caractéristiques

Nous avons vu trois types de surfaces caractéristiques pour un milieu anisotrope :

- **l'ellipsoïde des indices** : on porte dans la direction de \vec{D} (direction de polarisation pouvant se propager dans le milieu) la valeur d'indice associée. C'est la surface la plus simple (une seule nappe) pour représenter les caractéristiques diélectriques du milieu.

- la surface des vitesses (radiales) : on porte dans la direction d'un rayon (direction de propagation de l'énergie, direction du vecteur de Poynting) les deux valeurs de vitesses de propagation correspondant aux deux polarisations propres pouvant se propager le long de ce rayon. C'est une surface plus complexe, à deux nappes, utile pour construire la réfraction ou la réflexion des rayons dans un matériau anisotrope.

- la surface des indices : on porte dans la direction d'un vecteur d'onde (perpendiculaire à la surface d'onde) les deux valeurs d'indice correspondant aux deux polarisations propres pouvant se propager dans cette direction. C'est aussi une surface à deux nappes, qui sera surtout utile pour calculer les différences de marche dans un milieu anisotrope.

La figure 14 montre les surfaces des vitesses et des indices pour les milieux uniaxes positifs ou négatifs.

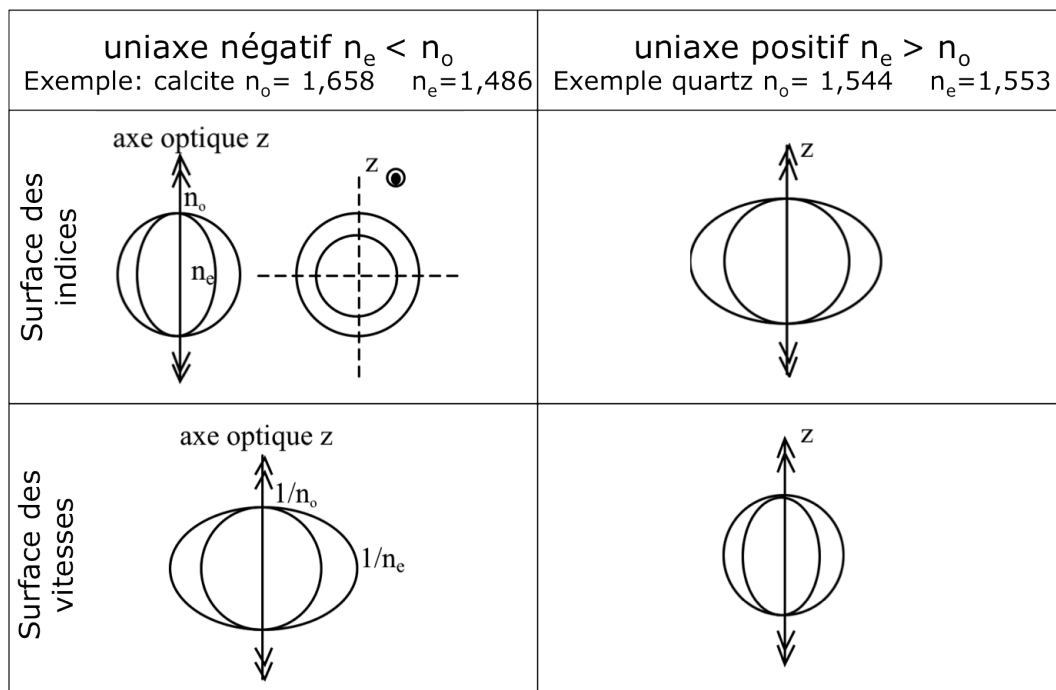


FIGURE 14 – Surfaces caractéristiques pour les milieux uniaxes

4 Réfraction : construction des rayons avec la surface des vitesses

L'existence de deux indices de réfraction possibles va conduire au phénomène de double réfraction, et au dédoublement des images. Nous allons voir maintenant comment utiliser la surface des vitesses, celle qui justement représente la direction du rayon, pour construire les rayons réfractés à l'interface entre un milieu isotrope et un milieu anisotrope. Chaque rayon se propageant après réfraction dans le milieu anisotrope va correspondre à un état de polarisation

(vecteur E et D) spécifique, qu'il va falloir également déterminer. Les constructions se font par analogie avec les méthodes employées pour les milieux isotropes, ici la construction de Huyghens.

4.1 Rappel de la construction de Huyghens dans le cas d'un milieu isotrope

On considère une interface plane entre un milieu d'indice 1 et un milieu d'indice n . Un rayon incident sur cette interface fait un angle d'incidence i avec la normale (cf figure 15). A partir du point d'intersection O de ce rayon avec l'interface, on trace deux cercles, l'un de rayon 1, l'autre de rayon $1/n$. En l'absence d'interface, le rayon aurait poursuivi son chemin jusqu'au point I sur le cercle de rayon 1 suivant le tracé en pointillé. On trace, toujours en pointillé, la tangente au cercle de rayon 1 au point I : elle vient couper l'interface en un point J . Ce point J est atteint par l'onde incidente au même instant où le rayon aurait atteint le point I en l'absence d'interface. Mais en arrivant au point O , la vitesse de propagation passe de c à c/n . Au lieu d'atteindre le point I , le rayon atteindra donc un point plus proche, situé sur le cercle de rayon $1/n$. Le plan d'onde après réfraction passera donc par le point J et par un point de ce cercle de rayon $1/n$: on peut tracer ce plan d'onde en traçant la tangente au cercle de rayon $1/n$ passant par le point J . Le point de tangence K est le point par lequel passera le rayon réfracté issu du point O . On peut vérifier que l'angle r du rayon réfracté avec la normale vérifie bien la loi de Descartes $\sin i = n \sin r$.

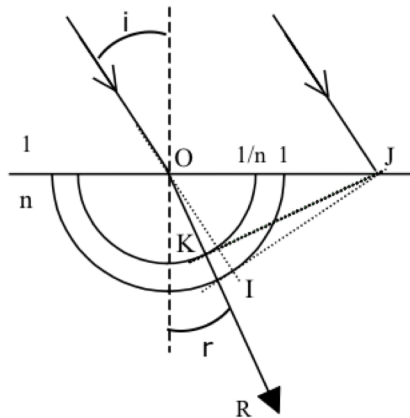


FIGURE 15 – Construction d'Huyghens dans le cas de milieux isotropes

4.2 Construction dans le cas d'un milieu anisotrope uniaxe

On considère un rayon incident sur une interface plane entre un milieu d'indice 1 et un milieu anisotrope uniaxe positif d'axe optique parallèle à l'interface et contenu dans le plan d'incidence. A partir du point d'intersection O de ce rayon avec l'interface, on trace les surfaces des vitesses pour le milieu incident et le milieu émergent, à savoir :

- un cercle de rayon 1 pour le milieu incident
- un cercle de rayon $1/n_o$ pour l'ordinaire du milieu émergent
- une ellipse d'axe $1/n_o$ dans la direction de l'axe optique et d'axe $1/n_e$ dans la direction perpendiculaire.

Comme pour le tracé isotrope, on prolonge le rayon incident jusqu'au cercle de rayon 1 (point I), puis on trace la tangente au cercle en ce point et on trouve le point d'intersection J avec

l'interface. A partir du point J, on trace les tangentes au cercle ordinaire (point d'intersection K_o) et à l'ellipse extraordinaire (point d'intersection K_e). On obtient ainsi les rayons réfractés ordinaire \vec{R}_o et extraordinaire \vec{R}_e .

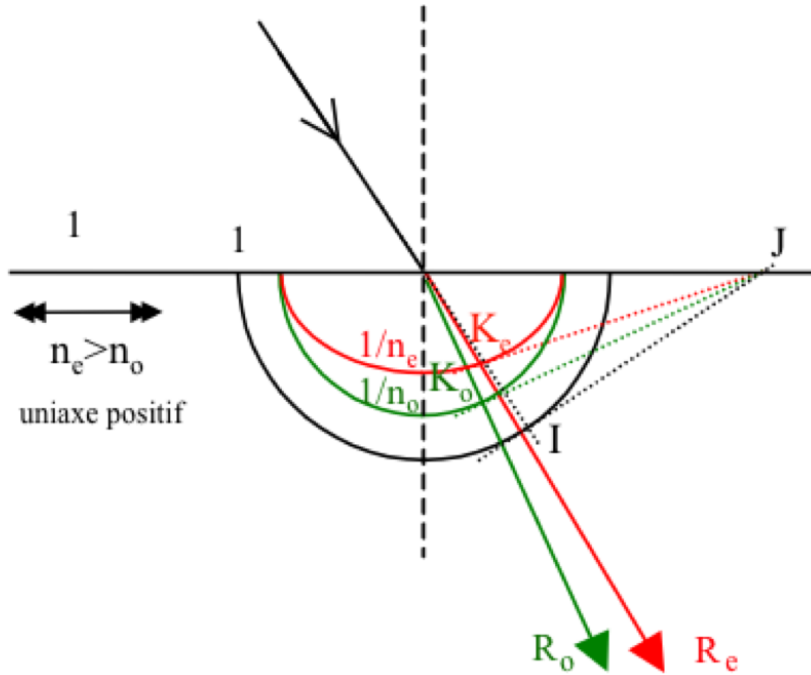


FIGURE 16 – Construction des rayons réfractés dans un milieu anisotrope uniaxe

Il s'agit maintenant de déterminer quelles polarisations propres correspondent à ces rayons réfractés. Pour cela on va utiliser les propriétés suivantes des vecteurs \vec{E} , \vec{D} , \vec{k} et \vec{R} ordinaires et extraordinaires :

- \vec{E}_o : **perpendiculaire à l'axe optique et perpendiculaire au rayon ordinaire \vec{R}_o**
- \vec{D}_o : **parallèle à \vec{E}_o**
- \vec{E}_e : **perpendiculaire à \vec{E}_o et perpendiculaire au rayon extraordinaire \vec{R}_e**
- \vec{D}_e : **dans le même plan que \vec{E}_e et \vec{R}_e et dans le plan tangent à la surface des vitesses extraordinaires (déjà tracé pour la construction)**
- si besoin \vec{k}_e : **dans le même plan que \vec{E}_e , \vec{R}_e et \vec{D}_e et orthogonal à \vec{D}_e**

Plusieurs de ces propriétés ont été démontrées en utilisant l'ellipsoïde des indices dans un milieu uniaxe (cf figure 8). Le fait que \vec{D}_e est tangent à la nappe extraordinaire de la surface des vitesses radiales est dans le plan tangent à la surface des vitesses est démontré ci-dessous.

Démonstration annexe : \vec{D}_e est tangent à la nappe extraordinaire de la surface des vitesses radiales

La nappe extraordinaire de la surface des vitesses dans un milieu uniaxe a pour équation :

$$n_e^2 x^2 + n_e^2 y^2 + n_o^2 z^2 = 1 \quad (29)$$

Pour une direction du rayon \vec{R}_e de coordonnées $(\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$ dans le repère (x, y, z) , le vecteur normal à la nappe extraordinaire dans la direction de \vec{R}_e s'écrit :

$$\vec{N}_e = \begin{bmatrix} \alpha_R n_e^2 \\ \beta_R n_e^2 \\ \gamma_R n_o^2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

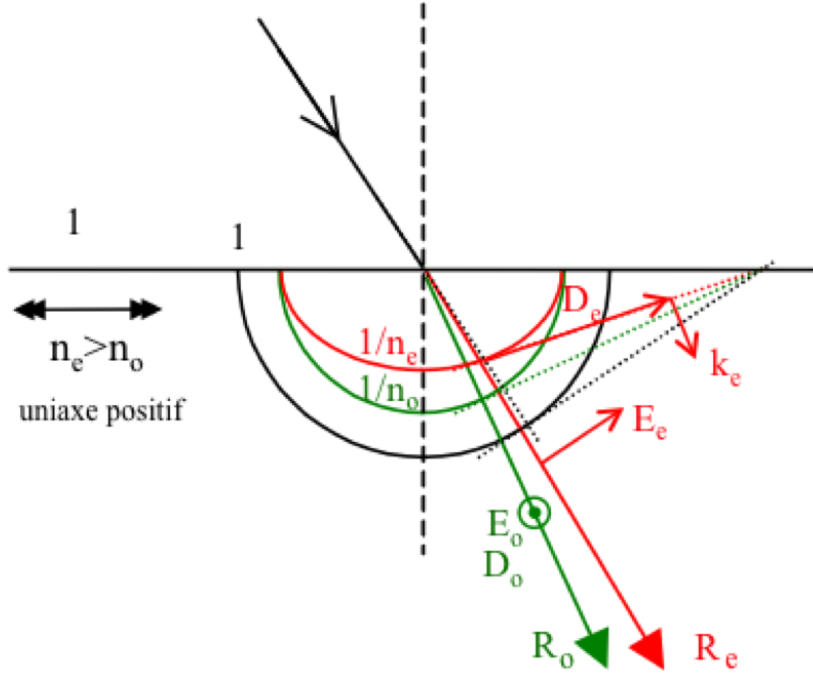


FIGURE 17 – Construction des polarisations associées aux rayons réfractés

On peut relier \vec{D}_e à \vec{E}_e en utilisant la relation constitutive :

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (31)$$

Finalement le produit scalaire de \vec{N}_e par \vec{D}_e donne :

$$\vec{N}_e \cdot \vec{D}_e = \epsilon_0 n_o^2 n_e^2 (\alpha_R E_x + \beta_R E_y + \gamma_R E_z) = \epsilon_0 n_o^2 n_e^2 \vec{R}_e \cdot \vec{E}_e = 0 \quad (32)$$

On trouve bien que \vec{D}_e est tangent à la nappe extraordinaire de la surface des vitesses radiales.

En utilisant ces propriétés sur la construction des rayons réfractés, on obtient les directions de tous les vecteurs associés à chaque rayon (cf figure 17). Selon la polarisation du rayon incident, l'intensité se répartira entre les deux rayons réfractés :

- si la lumière n'est pas polarisée, on aura la moitié de l'intensité sur chaque rayon ;
- si elle est déjà polarisée linéairement perpendiculaire au plan d'incidence (donc parallèle à \vec{E}_o), toute son intensité suivra le rayon ordinaire ;
- si elle est déjà polarisée linéaire parallèlement au plan d'incidence, toute l'intensité suivra le rayon extraordinaire ;
- pour un champ incident quelconque, sa projection sur la direction ordinaire suivra le trajet du rayon ordinaire, l'autre composante suivra le trajet extraordinaire.