

Diplôme d'ingénieur - 1ère année

**Polarisation et propagation de la lumière
dans les milieux anisotropes**

Matthieu Boffety, David Clément

21 mars 2023

Institut d'Optique *Graduate School*

Avant-Propos

Pour les physiciens, la lumière est formée d'ondes électromagnétiques. Il s'en suit que la description de la lumière et des effets qui peuvent lui être associés – l'optique – s'appuie sur les équations de Maxwell de l'électromagnétisme. Par conséquent, tout cours d'optique – cela inclut notre cours bien entendu – tisse des liens forts avec les cours d'électromagnétisme.

Les ondes lumineuses (électromagnétiques) sont vectorielles : le champ électrique (ou magnétique) associé à la lumière oscille au cours du temps avec une orientation privilégiée. La trajectoire suivie par le vecteur du champ électrique au cours du temps est appelée polarisation de la lumière. Par exemple, si le vecteur du champ électrique lumineux est fixe, c'est à dire si le champ oscille le long d'un axe fixe, on parlera de polarisation linéaire de la lumière selon cet axe. Si le vecteur champ électrique tourne au cours du temps, on parlera de polarisation elliptique. Notre cours vise à donner une définition précise de la polarisation et des outils nécessaires à son analyse. Cela permettra de décrire et comprendre nombres de phénomènes liés à la polarisation de la lumière.

Lorsque la lumière se propage dans le vide, le vecteur champ électrique lumineux est conservé puisqu'il se propage sans interaction (il n'existe aucune charge dans le vide). Par conséquent, la polarisation de la lumière est conservée lors d'une propagation dans le vide. Au contraire, lorsque la lumière se propage dans la matière, l'interaction entre le champ lumineux et les charges électriques du milieu peut conduire à des modifications des propriétés d'oscillation du champ électrique. En particulier, dans certains milieux dits anisotropes, la polarisation de la lumière peut être modifiée au cours de la propagation de la lumière dans ces milieux. Dans les milieux dits isotropes, l'interaction entre le champ lumineux et la matière est isotrope, et elle ne donne pas lieu à aucune modification de la polarisation au cours de la propagation. Dans notre cours, nous décrivons les modifications de la polarisation rencontrées dans les milieux anisotropes, ainsi que les utilisations les plus courantes associées à de telles modifications.

Enfin, une description rigoureuse de la lumière et de l'optique requiert une approche statistique. Dans le domaine temporel, cela se traduit par le fait que la notion d'onde monochromatique ne permet jamais de pleinement décrire une source de lumière réelle (des fluctuations aléatoires de la phase du champ, induites par de nombreux phénomènes, élargissent le spectre lumineux). Dans le cas de la polarisation, l'approche statistique est nécessaire pour comprendre les sources non polarisées ou partiellement polarisées. Par

ailleurs, les interférences en lumière polarisée s'appuient également sur une telle approche statistique. Notre cours abordera ces notions qui s'avèrent très souvent importantes pour décrire correctement une situation réelle.

Description succincte de l'organisation du cours. Nous avons fait le choix de diviser le cours de polarisation et propagation de la lumière dans les milieux anisotropes en trois grandes parties :

- (1) la première partie décrit les états de polarisation et les principaux composants optiques, à travers une approche de type fonctions de transfert (vecteurs et matrices de Jones);
- (2) la seconde partie présente une description microscopique de la propagation de la lumière dans les milieux anisotropes (origine microscopique des effets d'anisotropie optique, équation de propagation du champ lumineux et indices optiques, construction des rayons lumineux);
- (3) la troisième partie aborde une description statistique de la lumière et sa polarisation, afin de décrire les interférences en lumière polarisée et les notions de polarisation partielle.

Il faut souligner deux éléments importants du cadre dans lequel s'inscrit notre cours. D'une part, nous ne traiterons pas les effets non-linéaires de l'optique dans les milieux et nous nous restreindrons à décrire la seule **réponse linéaire avec le champ lumineux** (une réponse non-linéaire à des champs externes stationnaires sera considérée). D'autre part, nous ne traiterons pas de situations dans laquelle une approche quantique de l'optique est nécessaire. Tous les champs lumineux que nous décrirons sont des **champs lumineux classiques** (c'est à dire avec un grand nombre de photons par mode du champ électromagnétique).

Table des matières

Avant-Propos	ii
Table des matières	iv
ÉTATS DE POLARISATION DE LA LUMIÈRE ET COMPOSANTS	1
1 États de polarisation et formalisme de Jones	2
1.1 Ellipse de polarisation et vecteur de Jones	3
1.1.1 Sens de rotation de l'ellipse	4
1.1.2 Autre paramétrisation de l'ellipse de polarisation	5
1.2 Exemples de vecteur de Jones	6
1.3 Etats de polarisation orthogonaux	7
2 Composants polarimétriques et matrices de Jones	8
2.1 La matrice de Jones	8
2.1.1 Association de matrices de Jones	9
2.1.2 Analyse d'une matrice de Jones	9
2.1.3 Changement de base	10
2.2 Matrices de Jones de composants classiques	11
2.2.1 Polariseur	11
2.2.2 Déphaseur	13
2.2.3 Rotateur	17
2.3 Analyse et génération de polarisation	18
2.3.1 Analyse d'un état de polarisation	18
2.3.2 Génération d'un état de polarisation	19
PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS LES MILIEUX ANISOTROPES	21
3 Origine microscopique de la biréfringence	22
3.1 Quelques exemples de matériaux biréfringents	22
3.2 Indice complexe d'un milieu et anisotropie optique	23
3.2.1 Mouvement d'une charge et dipôle induit	23
3.2.2 Cas d'un milieu isotrope	23
3.2.3 Cas d'un milieu anisotrope	24
3.3 Ellipsoïde des indices	26
4 Equation de propagation - polarisations propres et indices	27
4.1 Propagation de la lumière dans la matière	27
4.1.1 Equation de propagation	27
4.1.2 Equation aux valeurs propres pour \mathbf{D}_ω	28
4.1.3 Retour sur l'ellipsoïde des indices	29
4.2 Polarisations propres de propagation	29
4.2.1 Propriétés des polarisations propres	29
4.2.2 Orientation des vecteurs propres	30
4.3 Cas d'un milieu absorbant	32

5	Propagations des rayons et vecteurs d'onde dans un milieu anisotrope	34
5.1	Equation de Fresnel	34
5.2	Surface des indices	35
5.2.1	Cas d'un milieu uniaxe	35
5.2.2	Cas d'un milieu biaxe	36
5.3	Surface des vitesses radiales	37
6	Construction des rayons à partir de la surface des vitesses radiales	39
6.1	Construction de Huygens pour les milieux isotropes	39
6.2	Construction des rayons réfractés dans un milieu anisotrope uniaxe . . .	41
6.3	Orientation des vecteurs de l'onde dans le milieu anisotrope uniaxe . . .	41
7	Effets physiques modifiant les indices d'un milieu biréfringent	43
7.1	Effets photo-électriques	45
7.2	Effet magnéto-optique	46
 DESCRIPTION STATISTIQUE DE LA LUMIÈRE POLARISÉE : INTERFÉRENCES ET POLARISATION PARTIELLE		48
Introduction		49
8	Interférences en lumière polarisée	50
8.1	Rappels sur les interférences lumineuses et la lumière blanche	50
8.1.1	Interférences lumineuses - définition	50
8.1.2	Rôle du temps d'intégration lors de la détection	51
8.1.3	Lumière polychromatique - lumière blanche	52
8.2	Interférences en lumière monochromatique	54
8.2.1	Conditions d'observation d'interférences	54
8.2.2	Applications	56
8.3	Interférences en lumière blanche	57
8.3.1	Conditions d'observation d'interférences	57
8.3.2	Applications	58
9	Formalisme de Stokes-Mueller	59
9.1	Paramètres et vecteur de Stokes	59
9.1.1	Lien avec le vecteur de Jones	60
9.1.2	Exemples de vecteurs de Stokes	60
9.1.3	Sphère de Poincaré	60
9.2	Matrice de Mueller	62
9.2.1	Matrice de Mueller de composants classiques	62
9.2.2	Action d'un retardateur sur la sphère de Poincaré	63
10	Lumière partiellement polarisée	65
10.1	Représentation d'un état partiellement polarisé	65
10.1.1	Matrice de cohérence	66
10.1.2	Propriétés de la lumière partiellement polarisée	69
10.1.3	Vecteur de Stokes	70
10.1.4	Conclusion : représentations de l'état de polarisation	73
10.2	Mécanismes de dépolarisation	73
10.2.1	Dépolarisation temporelle	73
10.2.2	Diffusion multiple	74

10.3	Retour sur la matrice de Mueller	76
10.3.1	Action d'une matrice de Jones sur la matrice de cohérence	77
10.3.2	Matrice de Mueller-Jones	77
10.3.3	Matrices de Mueller-Jones de composants classiques	78
10.3.4	Matrice de Mueller d'un milieu dépolarisant	79
10.3.5	Matrice de Mueller d'un dépolariseur pur	80
10.3.6	Exemple de composant optique dépolarisant	80
10.3.7	Conclusion	82

**ÉTATS DE POLARISATION DE LA LUMIÈRE ET
COMPOSANTS**

États de polarisation et formalisme de Jones

1

Une onde lumineuse se propageant dans un milieu diélectrique peut être représentée par son vecteur champ électrique.

On rappelle qu'une onde quelconque polychromatique peut être décomposée comme une **combinaison linéaire d'ondes planes monochromatiques**. Un champ électrique quelconque $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ peut en effet s'exprimer sous la forme

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \iiint_{k_x, k_y, k_z} \int_{\omega} \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (1.1)$$

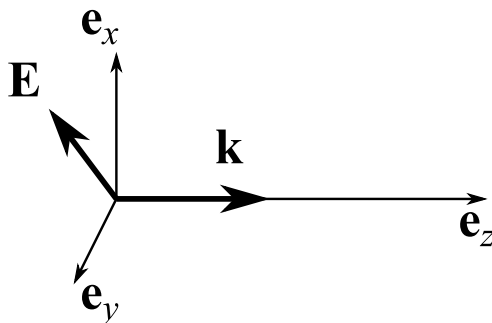
où $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ décrit le champ électrique associé à une onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} . Nous supposons que cette décomposition est valable dans les situations que nous considérerons. Par conséquent, nous pouvons restreindre notre discussion à celle d'une onde plane monochromatique, sans restreindre la généralité de notre propos : il suffit de sommer les contributions des différentes ondes planes monochromatiques de l'équation précédente pour décrire un champ arbitraire, polychromatique*.

Onde plane monochromatique. Dans ce chapitre, nous considérons une onde plane et monochromatique de pulsation $\omega = 2\pi\nu$ (où ν est la fréquence) qui se propage selon la direction \mathbf{e}_z . Le vecteur $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)\mathbf{e}_z$ est le vecteur d'onde (λ est la longueur d'onde), avec $\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\mathbf{e}_z = k\mathbf{e}_z$.

Dans un milieu isotrope et sans source de champs électrique ou magnétique[†], les équations de Maxwell de l'électromagnétisme conduisent à

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (1.2)$$

ce qui signifie que le champ électrique est contenu dans le plan orthogonal à la direction de propagation : on dit que le champ est *transverse*. Sur la figure 1.1, le vecteur unitaire \mathbf{e}_z représente la direction de propagation et les vecteurs \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y une base orthonormale du plan transverse.



* Cette notion de décomposition en ondes planes monochromatiques est développée et discutée dans le premier chapitre du cours d'électromagnétisme.

† Le vide fait partie des milieux isotropes et sans source.

FIGURE 1.1 – Onde transverse et système de coordonnées utilisé. Une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu isotrope et sans charge est un exemple de telle onde transverse.

Le champ électrique d'une telle onde plane monochromatique peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = [E_x(x, y)\mathbf{e}_x + E_y(x, y)\mathbf{e}_y] \exp[-i(\omega t - kz)] \quad (1.3)$$

- 1.1 Ellipse de polarisation et vecteur de Jones 3
- 1.1.1 Sens de rotation de l'ellipse 4
- 1.1.2 Autre paramétrisation de l'ellipse de polarisation 5
- 1.2 Exemples de vecteur de Jones 6
- 1.3 États de polarisation orthogonaux 7

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ désigne un point de l'espace. Dans cette équation, les composantes E_x et E_y du champ sont à valeurs complexes. Le champ électrique physique est égal à la partie réelle du vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

L'intensité de l'onde, c'est à dire la puissance qu'elle transporte, est égale au flux du vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$, où \mathbf{B} est le champ magnétique de l'onde plane monochromatique et μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. Le vecteur de Poynting est dirigé dans la direction \mathbf{e}_z et sa norme est proportionnelle au module carré du vecteur $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $|\mathbf{\Pi}|^2 = \epsilon_0 c |\mathbf{E}|^2$. Dans la suite, on omettra le facteur $\epsilon_0 c$ et on désignera par intensité de l'onde la valeur $I(x, y)$ telle que :

$$I(x, y) = |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = |E_x(x, y)|^2 + |E_y(x, y)|^2 \quad (1.4)$$

On remarque qu'elle est indépendante du temps. Dans la suite, on se placera en un point donné du plan transverse, et on ne notera donc plus la dépendance spatiale du champ en (x, y) .

1.1 Ellipse de polarisation et vecteur de Jones

L'équation (1.3) qui décrit de l'onde plane monochromatique montre que l'extrémité du vecteur champ électrique décrit une trajectoire elliptique au cours du temps. En effet, à une position \mathbf{r} et un temps t donnés, le champ électrique complexe peut s'écrire :

Champ électrique transverse

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} A_x e^{i\phi_x} \\ A_y e^{i\phi_y} \end{bmatrix} \exp[-i(\omega t - kz)] \quad (1.5)$$

où A_x (resp. A_y) est le module du nombre complexe E_x (resp. E_y) et ϕ_x (resp. ϕ_y) sa phase. Sa partie réelle s'exprime sous la forme :

$$\Re[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t - kz - \phi_x) \\ A_y \cos(\omega t - kz - \phi_y) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

On reconnaît l'équation paramétrique d'une ellipse. C'est la forme de cette ellipse qui définit l'état de polarisation de l'onde*. Il est important de souligner que cette forme dépend de la différence de phase entre les composantes du champ selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y ,

$$\Delta\phi = \phi_y - \phi_x \quad (1.7)$$

et non de leur phase absolue. En effet, soustraire la phase ϕ_y sur les deux composantes du champ revient simplement à changer l'origine des temps, ce qui ne modifie pas la forme de l'ellipse.

Par conséquent, à partir de l'équation (1.6), l'état de polarisation peut être défini en introduisant le vecteur suivant :

*Dit autrement, la polarisation de la lumière est la trajectoire de son champ électrique au cours du temps.

Vecteur de Jones

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y e^{i\Delta\phi} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

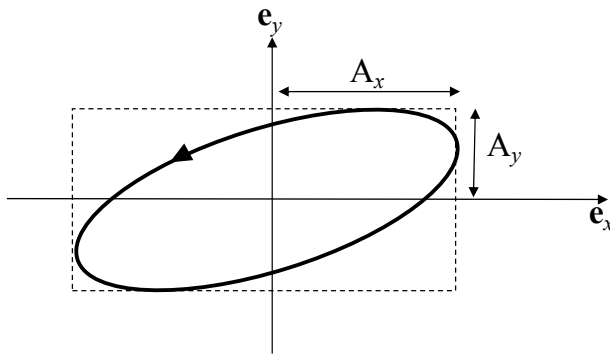
C'est le *vecteur de Jones*. Ce vecteur est défini par les trois paramètres réels A_x , A_y et $\Delta\phi$. Pour une position donnée (c'est à dire pour une valeur z fixe)[†], il correspond à une ellipse d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} X(t) = A_x \cos(\omega t) \\ Y(t) = A_y \cos(\omega t - \Delta\phi) \end{cases} \quad (1.9)$$

qu'on peut aussi écrire de la manière suivante :

$$\frac{X(t)^2}{A_x^2} + \frac{Y(t)^2}{A_y^2} - \frac{2 \cos \Delta\phi}{A_x A_y} X(t)Y(t) = \sin^2 \Delta\phi \quad (1.10)$$

Ainsi, à une position fixe quelconque, on constate que l'ellipse de polarisation ainsi définie est inscrite dans le rectangle de demi-longueurs A_x et A_y (Figure 1.2).



[†] Conserver la position z dans la phase de l'onde ajouterait un terme constant kz sur chacune des deux projections, terme qui n'a aucune incidence sur la paramétrisation de l'ellipse puisqu'il ne change pas la différence de phase $\Delta\phi$.

FIGURE 1.2 – Ellipse de polarisation associée au vecteur de Jones de composantes A_x et $A_y e^{i\Delta\phi}$.

1.1.1 Sens de rotation de l'ellipse

On constate sur l'équation (1.10) que les valeurs de déphasage $\Delta\phi$ et $-\Delta\phi$ conduisent à la même équation d'ellipse. En revanche, ces différentes valeurs correspondent à *des sens de rotation différents*. En effet, plaçons nous par exemple à l'instant $t = 0$ (cela correspond, sur la figure 1.3, au point où l'ellipse est tangente au bord vertical du rectangle, en haut à droite). Calculons la dérivée du vecteur champ électrique par rapport au temps en ce point. L'équation (1.10) conduit à :

$$\left. \frac{dX(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (1.11)$$

$$\left. \frac{dY(t)}{dt} \right|_{t=0} = \omega A_y \sin \Delta\phi \quad (1.12)$$

Par conséquent (cf. Figure 1.3) :

- $\sin \Delta\phi > 0$: la dérivée de $Y(t)$ est positive. Cela signifie que la rotation a lieu dans le **sens trigonométrique direct**. Si on regarde l'onde arrivant de face, l'extrémité du vecteur champ électrique tourne vers la gauche. On parle donc de **polarisation gauche**.

- $\sin \Delta\phi < 0$: la dérivée de $Y(t)$ est négative. Cela signifie que la rotation a lieu dans le **sens trigonométrique inverse**. Si on regarde l'onde arrivant de face, l'extrémité du vecteur champ électrique tourne vers la droite. On parle donc de **polarisation droite**.
- $\sin \Delta\phi = 0$: la polarisation est linéaire. Le sens de rotation n'est pas défini.

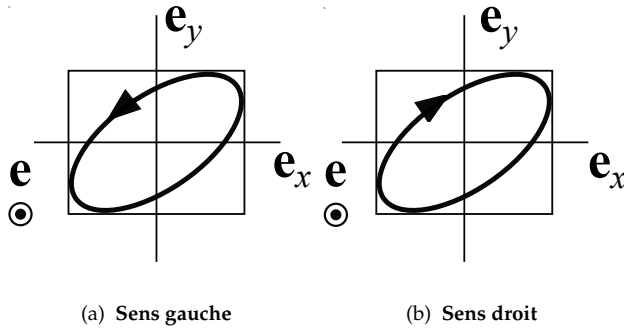


FIGURE 1.3 – Définition du sens de l'état de polarisation. Ce dernier dépend du signe de la différence de phase $\Delta\phi$.

1.1.2 Autre paramétrisation de l'ellipse de polarisation

Le vecteur de Jones est une manière de représenter l'état de polarisation de la lumière (totalement) polarisée*. Il en existe d'autres. Par exemple, on peut utiliser les paramètres géométriques de l'ellipse de polarisation. Ces paramètres sont au nombre de trois (Figure 1.4) :

- **Intensité** : $I = a^2 + b^2$.
- **Azimut** : angle α que fait le grand axe de l'ellipse avec l'axe \mathbf{e}_x , on a alors $\alpha \in [0, \pi]$.
- **Ellipticité** : angle ε que fait le grand axe de l'ellipse avec la diagonale du rectangle circonscrit, orienté par rapport à ce grand axe. On a donc :

$$\tan \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \varepsilon \in [-\pi/4, \pi/4] \quad (1.13)$$

Une ellipticité nulle correspond à une polarisation linéaire, c'est à dire que l'ellipse de polarisation est une droite. Par convention, le signe de ε correspond au sens de rotation de l'ellipse :

- $\varepsilon > 0$: polarisation gauche.
- $\varepsilon < 0$: polarisation droite.

Par exemple, une ellipticité $\varepsilon = \pi/4$ correspond à une polarisation circulaire gauche et une ellipticité $\varepsilon = -\pi/4$ correspond à une polarisation circulaire droite.

Il est utile de pouvoir exprimer ces paramètres en fonction de ceux du vecteur de Jones. Pour cela, on utilise l'expression de l'ellipse de polarisation dans l'équation (1.10). On diagonalise la forme quadratique associée, ce qui permet de déterminer les longueurs (valeurs propres) et les orientations des axes (vecteurs propres). On obtient les résultats suivants :

* Nous verrons plus loin dans le cours (dans la troisième partie du cours) comment traiter le cas de la lumière non-polarisée, ou partiellement polarisée.

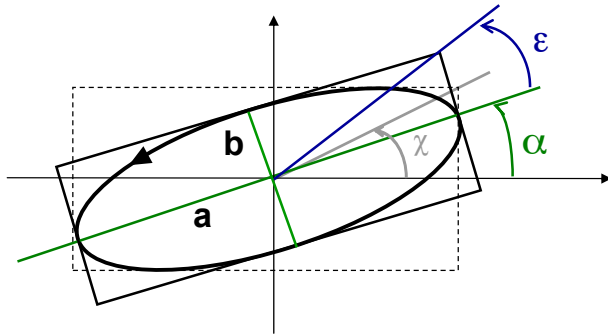


FIGURE 1.4 – Intensité, azimut et ellipticité de l'ellipse de polarisation.

— L'angle d'azimut α est donné par :

$$\tan 2\alpha = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \Delta\phi \quad (1.14)$$

— Les longueurs des grand et petit axes sont respectivement :

$$\begin{aligned} a^2 &= A_x^2 \cos^2 \alpha + A_y^2 \sin^2 \alpha + 2A_x A_y \cos \alpha \sin \alpha \cos \Delta\phi \\ b^2 &= A_x^2 \sin^2 \alpha + A_y^2 \cos^2 \alpha - 2A_x A_y \cos \alpha \sin \alpha \cos \Delta\phi \end{aligned} \quad (1.15)$$

Ce résultat permet de déterminer l'intensité de l'onde :

$$I = A_x^2 + A_y^2 = a^2 + b^2 \quad (1.16)$$

ainsi que son ellipticité en utilisant l'équation (1.13). Le sens de rotation, et donc le signe de ϵ , est donné par le signe de $\Delta\phi$.

Dans certaines situations, il peut être aussi utile d'utiliser un quatrième paramètre, l'angle χ (cf. Figure 1.4), dont la tangente est égale au rapport des amplitudes A_y et A_x :

$$\tan \chi = \frac{A_y}{A_x}$$

1.2 Exemples de vecteur de Jones

Considérons quelques états de polarisation particuliers d'intensité unitaire, c'est à dire ayant un vecteur de Jones normalisé à l'unité :

— **Polarisation linéaire** : L'état de polarisation est linéaire lorsque l'ellipse de polarisation est une droite (ellipticité nulle, $\epsilon = 0$). Cet état est caractérisé par un seul paramètre, l'angle α que fait cette droite avec l'axe e_x (azimut). Son vecteur de Jones est :

Vecteur de Jones d'une polarisation linéaire

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

On notera que les vecteurs de Jones des états linéaires sont des vecteurs purement réels. Un terme de phase absolue ne change pas cet état de fait.

— **Polarisation circulaire** : si $\Delta\phi = \pm\pi/2$, l'ellipse devient un cercle. Les vecteurs de Jones d'intensité unitaire correspondants sont :

Vecteur de Jones d'une polarisation circulaire

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} : \text{circulaire gauche} , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} : \text{circulaire droit} \quad (1.18)$$

- **Cas général** : Un état de polarisation quelconque et d'intensité unitaire s'écrit :

Vecteur de Jones d'une polarisation arbitraire

$$\begin{bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi e^{i\Delta\phi} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

C'est un état elliptique dont le sens de rotation est donné par le signe de $\Delta\phi$.

1.3 États de polarisation orthogonaux

L'intérêt de représenter l'état de polarisation par un vecteur est de pouvoir utiliser les propriétés d'un espace vectoriel hermitien. Ainsi, on peut définir le produit scalaire de deux vecteurs de Jones \mathbf{u} et \mathbf{v} de la manière suivante :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{v} = u_x^* v_x + u_y^* v_y \quad (1.20)$$

Cela permet de définir la notion d'*états de polarisation orthogonaux*. Ce sont des états dont le produit scalaire des vecteurs de Jones est nul.

La norme du vecteur de Jones est égale à l'intensité de l'onde*. On appellera *état normalisé* un état de polarisation d'intensité unitaire :

$$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

On pourra alors généralement écrire $\mathbf{u} = \sqrt{I} \mathbf{u}_n$, on I est l'intensité de l'onde.

Exercice : Quel sont les états orthogonaux aux états définis à la section précédente? Quels sont les paramètres de leurs ellipses de polarisation?

* On rappelle qu'en toute rigueur il faut considérer le facteur multiplicatif $\epsilon_0 c$.

Composants polarimétriques et matrices de Jones

2

Dans le chapitre précédent nous avons défini l'état de polarisation de la lumière, en l'associant à la trajectoire du vecteur champ électrique de la lumière.

Nous allons maintenant nous intéresser aux modifications de la polarisation induites par des composants optiques – composants dits polarimétriques. De tels composants possèdent un milieu anisotrope du point de vue de la propagation du champ lumineux, à l'origine des modifications de la trajectoire du champ électrique. La description microscopique de la propagation de la lumière dans ces milieux anisotropes sera traitée dans une partie ultérieure.

Dans ce chapitre, nous allons décrire les composants polarimétriques par une « fonction de transfert » du point de vue de la polarisation : nous souhaitons décrire l'effet du composant en reliant le vecteur de Jones en entrée du composant au vecteur de Jones à sa sortie. Pour cela, nous allons introduire une matrice de transfert, appelée matrice de Jones. Cette matrice permet ainsi de décrire comment est modifiée la polarisation incidente sur le composant pour en calculer la polarisation de sortie.

2.1 La matrice de Jones

Si on note \mathbf{E}^{in} le vecteur de Jones incident sur le composant et \mathbf{E}^{out} le vecteur de Jones émergent, on a :

Matrice de Jones J	
	$\mathbf{E}^{\text{out}} = \mathbf{J} \mathbf{E}^{\text{in}}$ (2.1)
où	$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yy} & J_{yx} \end{bmatrix}$ (2.2)

est une matrice 2×2 appelée *matrice de Jones*. Cette écriture suppose que le composant (ou plus précisément le milieu traversé par l'onde lumineuse) est non diffusant et qu'il interagit avec la lumière polarisée de façon linéaire (théorie de la réponse linéaire *).

Les coefficients de la matrice de Jones sont *a priori* complexes. Elle est donc définie par 8 paramètres réels. Cependant, puisque l'état de polarisation ne dépend que de la différence de phase $\Delta\phi$ des deux composantes du vecteur de Jones, la matrice de Jones est invariante par multiplication par un nombre complexe de module 1. Ainsi, il suffit de 7 paramètres réels pour définir la matrice de Jones.

- 2.1 La matrice de Jones 8
 - 2.1.1 Association de matrices de Jones 9
 - 2.1.2 Analyse d'une matrice de Jones 9
 - 2.1.3 Changement de base 10
- 2.2 Matrices de Jones de composants classiques 11
 - 2.2.1 Polariseur 11
 - 2.2.2 Déphaseur 13
 - 2.2.3 Rotateur 17
- 2.3 Analyse et génération de polarisation 18
 - 2.3.1 Analyse d'un état de polarisation 18
 - 2.3.2 Génération d'un état de polarisation 19

* Nous n'aborderons pas dans ce cours le traitement de la partie non-linéaire avec l'amplitude de l'onde lumineuse de la réponse des milieux anisotropes

2.1.1 Association de matrices de Jones

Si la lumière traverse successivement K milieux de matrices de Jones J_k dans l'ordre défini sur la figure 2.1, et si on note E^k le vecteur de Jones émergeant du composant J_k , on a :

$$E^{\text{out}} = J_K E^{K-1} = J_K J_{K-1} E^{K-2} = \dots = [J_K \dots J_1] E^{\text{in}} \quad (2.3)$$

Par conséquent, cette succession de milieux est équivalente à un milieu unique de matrice de Jones* :

$$J = J_K \dots J_1 \quad (2.4)$$

* Il faut bien faire attention à l'ordre lorsqu'on multiplie les matrices de Jones! C'est important car la multiplication des matrices n'est pas commutative.

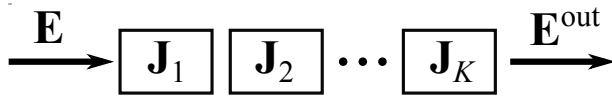


FIGURE 2.1 – Association de matrices de Jones.

2.1.2 Analyse d'une matrice de Jones

Dans le cas général, on peut définir les éléments propres d'une matrice 2×2 à valeurs complexes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} J \mathbf{v}_1 &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ J \mathbf{v}_2 &= \lambda_2 \mathbf{v}_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 sont les vecteurs propres de la matrice. Physiquement, ils représentent les états de polarisation qui ne sont pas modifiés par la traversée du (ou l'interaction avec) le composant. En théorie de la polarisation, on les appelle les *états propres*.

Les nombres complexes λ_1 et λ_2 sont les coefficients multiplicatifs (*a priori* complexes) qui affectent les états propres. On peut les écrire de la manière suivante :

$$\lambda_k = |\lambda_k| \exp(i\varphi_k) , \quad k \in [1, 2] \quad (2.6)$$

Il est clair que si le milieu n'est pas amplificateur (ce qui est le cas dans la plupart des applications), $|\lambda_k| \leq 1$. De plus, on supposera sans perte de généralité que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Cela permet de définir deux paramètres importants d'un milieu ou d'un composant modifiant l'état de polarisation de la lumière.

— La **diatténuation** est définie par

$$D = \frac{|\lambda_1| - |\lambda_2|}{|\lambda_1| + |\lambda_2|} \quad (2.7)$$

Elle représente l'écart normalisé d'atténuation en amplitude entre les deux états propres. C'est une valeur comprise entre 0 et 1. Par exemple, si les deux états ont le même coefficient d'atténuation en amplitude, on a $D = 0$. En revanche, si un des états est complètement absorbé par le milieu, c'est à dire que $|\lambda_2| = 0$, alors $D = 1$.

— La **retardance** est définie par :

$$R = |\varphi_1 - \varphi_2| \tag{2.8}$$

C'est la différence entre les déphasages subis par les deux états propres au cours de leur propagation dans le milieu. Elle est comprise entre 0 et 2π .

Si la matrice **J** est diagonalisable, c'est à dire si ses vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 forment une base*, l'équation (2.5) peut s'écrire sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1} \tag{2.9}$$

avec

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

et **U** est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . On distingue deux cas :

— Si les vecteurs propres sont orthogonaux, la matrice **U** est unitaire, ce qui signifie que $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ où \dagger désigne le conjugué hermitien (matrice transposée et conjuguée, $\mathbf{U}^\dagger = [\mathbf{U}^*]^T$). On a dans ce cas :

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^\dagger \tag{2.11}$$

On dit alors que la matrice de Jones est **homogène**. La plupart des matrices que nous allons utiliser dans la suite de ce cours appartiennent à cette catégorie.

— Si les vecteurs propres ne sont pas orthogonaux, la matrice de Jones est dite **inhomogène**.

2.1.3 Changement de base

En général, le vecteur de Jones est exprimé dans la base correspondant à deux états de polarisation linéaires orthogonaux. Cependant, il est parfois nécessaire de travailler dans une autre base, qui peut être par exemple une base d'états linéaires tournée d'un certain angle ou une base composée d'états orthogonaux mais non linéaires. On doit alors modifier la matrice de Jones pour travailler dans la nouvelle base.

Supposons que la matrice de Jones **J** soit définie dans la base \mathcal{A} et qu'on veuille déterminer son expression dans la base \mathcal{B} . Appelons **U** la matrice de changement de base dont chaque colonne est un vecteur de la base \mathcal{B} exprimé dans la base \mathcal{A} . Si les bases \mathcal{A} et \mathcal{B} sont orthogonales, **U** est une matrice unitaire.

Par exemple, si la base \mathcal{A} est $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et la base \mathcal{B} est une base d'états linéaires tournée d'un angle θ , la matrice **U** a l'expression suivante :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

*Ce n'est pas toujours le cas. Considérons par exemple la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elle a une valeur propre, 0, dont le sous-espace propre est de dimension 1. Cependant, la plupart des matrices de Jones rencontrées dans la pratique sont diagonalisables et même homogènes (voir plus loin pour la définition de ce terme).

C'est simplement la matrice de rotation d'angle θ . Si maintenant la base \mathcal{B} est la base des états circulaires gauche et droit, on a :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Si \mathbf{E}_a désigne le vecteur de Jones d'un état de polarisation exprimé dans la base \mathcal{A} et \mathbf{E}_b le vecteur de Jones du même état de polarisation exprimé dans la base \mathcal{B} , on a :

$$\mathbf{E}_b = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{E}_a \quad (2.14)$$

Si \mathbf{J}_a désigne la matrice de Jones du milieu exprimée dans la base \mathcal{A} et \mathbf{J}_b la matrice de Jones du même milieu exprimée dans la base \mathcal{B} , on a :

$$\mathbf{J}_b \mathbf{E}_b = \mathbf{U}^\dagger (\mathbf{J}_a \mathbf{E}_a) = \mathbf{U}^\dagger [\mathbf{J}_a (\mathbf{U} \mathbf{E}_b)] = [\mathbf{U}^\dagger \mathbf{J}_a \mathbf{U}] \mathbf{E}_b \quad (2.15)$$

d'où la formule de changement de base suivante :

Changement de base et matrice de Jones

$$\mathbf{J}_b = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{J}_a \mathbf{U} \quad (2.16)$$

Nous verrons des applications de cette formule dans les paragraphes suivants.

2.2 Matrices de Jones de composants classiques

Afin d'illustrer les notions générales qui précèdent, nous allons définir et commenter les matrices de Jones de différents composants utilisés couramment dans l'étude de la polarisation.

2.2.1 Polariseur

Un polariseur parfait est un **composant qui ne transmet qu'un seul état de polarisation**. Il n'apporte aucune modification à un état de polarisation incident fixé \mathbf{u} et absorbe complètement l'état orthogonal. Ses deux vecteurs propres sont donc \mathbf{u} et \mathbf{u}^\dagger , de valeurs propres respectives $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$. C'est donc un composant homogène de diatténuation 1. Sa matrice de Jones est celle d'un projecteur sur le vecteur \mathbf{u} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger \quad (2.17)$$

Un polariseur est dit « rectiligne » ou « linéaire » lorsque l'état \mathbf{u} est linéaire. Ci-dessous, on a représenté les matrices de Jones de polariseurs rectilignes dont les états propres sont respectivement parallèle à \mathbf{e}_x , parallèle à \mathbf{e}_y et faisant un angle θ avec \mathbf{e}_x :

Matrice de Jones d'un polariseur

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ parallèle à } \mathbf{e}_x, \\
\mathbf{P}_y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ parallèle à } \mathbf{e}_y, \\
\mathbf{P}_\theta &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \text{ angle } \theta \text{ avec } \mathbf{e}_x \quad (2.18)
\end{aligned}$$

La matrice \mathbf{P}_θ peut être obtenue soit en utilisant l'équation (2.17) avec $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta)^T$, soit en partant de la matrice \mathbf{P}_x et en utilisant la formule de changement de base (Eq. (2.16)).

Loi de Malus

Supposons que l'état de polarisation incident sur un polariseur parfait d'état propre \mathbf{u} soit représenté par le vecteur de Jones

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = \sqrt{I_{\text{in}}} \mathbf{v} \quad (2.19)$$

où \mathbf{v} est un vecteur de norme 1. Ici I_{in} correspond à l'intensité du champ incident, $I_{\text{in}} = \|\mathbf{E}^{\text{in}}\|^2$. L'état de polarisation émergent est égal à :

$$\mathbf{E}^{\text{out}} = \sqrt{I_{\text{in}}} (\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}) \mathbf{u} \quad (2.20)$$

La lumière émergente est donc toujours polarisée selon l'état propre \mathbf{u} du polariseur. Seule son intensité varie avec \mathbf{E}^{in} . Cette intensité est égale à :

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}} \|\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}\|^2 \quad (2.21)$$

A titre d'exemple, considérons un polariseur de matrice de Jones \mathbf{P}_x définie dans l'équation (2.18). Ses réponses à des états de polarisation linéaires d'angle θ , circulaire et elliptique sont illustrées sur la figure 2.2. Dans tous les cas, l'état de polarisation de sortie est linéaire et parallèle à \mathbf{e}_x . Dans le cas où \mathbf{E}^{in} est linéaire d'angle θ , l'intensité mesurée est :

Loi de Malus

$$I_{\text{out}}(\theta) = I_{\text{in}} \cos^2 \theta \quad (2.22)$$

Cette formule porte le nom de *Loi de Malus**.

Si \mathbf{E}^{in} est circulaire, l'intensité mesurée est simplement la moitié de l'intensité incidente. Cela est relié au fait que le vecteur de Jones correspondant à une polarisation circulaire peut toujours se décomposer comme la somme à parts égales de deux vecteurs de Jones correspondant à des états de polarisation linéaires orthogonaux.

*Du nom du physicien français Etienne Louis Malus (1775-1812). Il a découvert cette loi sans connaître les matrices de Jones... car le formalisme des matrices de Jones n'a été inventé que dans les années 1950.

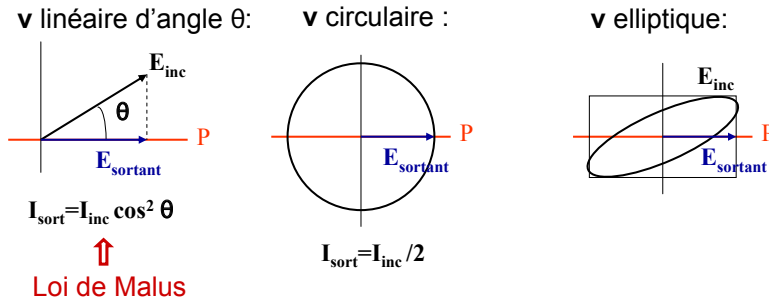


FIGURE 2.2 – Réponse d'un polariseur rectiligne parallèle à \mathbf{e}_x à différents états de polarisation incidents de vecteurs de Jones \mathbf{v} .

Polariseur non idéal

Dans la pratique, un polariseur n'est jamais parfait, car il ne laisse pas complètement passer l'état \mathbf{u} et n'absorbe pas complètement l'état orthogonal à \mathbf{u} . La matrice de Jones d'un polariseur imparfait dans la base de ses états propres est donc :

$$\mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

avec en général λ_1 proche de 1 et λ_2 proche de 0. L'efficacité d'un tel polariseur est caractérisée par sa diatténuation :

$$D = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2.24)$$

ou son *facteur d'atténuation* :

$$f = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (2.25)$$

La plupart des polariseurs utilisés dans la pratique sont linéaires. Cependant, on peut construire et utiliser des polariseurs dont les états propres peuvent être circulaires ou elliptiques.

2.2.2 Déphaseur

Un déphaseur (ou retardateur, ou élément biréfringent) est un **composant qui introduit un déphasage entre deux composantes de polarisation** et dont la matrice de Jones est unitaire. Cela signifie que ses valeurs propres sont de module 1, et par conséquent que, dans la base de ses états propres, sa matrice de Jones s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \exp(i\varphi_1) & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$= \exp\left(i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \begin{bmatrix} \exp(i\Delta\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\Delta\varphi/2) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$= \exp(i\varphi_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (2.29)$$

est la différence de déphasage, ou déphasage relatif, entre les deux états propres. Le terme de phase pure (en facteur) n'a que rarement une incidence et peut être souvent omis, sauf dans les cas où l'on fait de l'interférométrie.

Le plus souvent, on utilise des composants ou des milieux dont les états propres sont linéaires (ils sont orthogonaux puisque la matrice \mathbf{J} est unitaire). Les directions de ces états propres sont appelées **axes** ou **lignes neutres**. La direction de l'état propre le plus déphasé (\mathbf{e}_x si $\Delta\varphi > 0$) est appelée **axe lent**. La direction de l'état propre le moins déphasé (\mathbf{e}_y si $\Delta\varphi > 0$) est appelée **axe rapide**. Si les axes du repère de référence ne sont pas les lignes neutres du composant, on peut calculer sa matrice de Jones à partir de l'équation (2.28) en utilisant la formule de changement de base.

Les composants les plus utilisés dans les instruments optiques sont les lames demi-onde et les lames quart d'onde dont nous détaillons les propriétés dans la suite.

Lame demi-onde

Un déphaseur demi-onde, ou « lame demi-onde », est un déphaseur pour lequel $\Delta\varphi = \pi$, ce qui signifie que la différence de chemin optique entre les deux états propres est

$$\delta = \lambda \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}, \quad (2.30)$$

d'où le terme « demi-onde ». Dans la base des états propres, sa matrice de Jones a l'expression suivante :

Matrice de Jones d'une lame demi-onde

$$\mathbf{J}_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-i\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

qui correspond à la matrice d'une symétrie « miroir » par rapport aux axes de la lame. On peut noter que pour une lame demi-onde, il n'y a pas besoin de différencier la direction de l'axe lent et celle de l'axe rapide. En effet, toute matrice de Jones est invariante par multiplication par -1 car c'est un terme de phase pure (attention cependant en interférométrie).

Supposons que l'état de polarisation incident soit linéaire avec un angle θ par rapport à un axe neutre. L'état émergent est obtenu de la manière suivante (Figure 2.3.a) :

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \implies \mathbf{E}^{\text{out}} = \mathbf{J}_{\lambda/2} \mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

L'état de sortie est donc linéaire et sa direction se déduit de celle de l'état incident par une symétrie par rapport aux lignes neutres de la lame.

Exercice : Ecrire la matrice de Jones d'un déphaseur linéaire de $\varphi = \pi/2$ dont lignes neutres sont orientées à 45° des axes de référence.

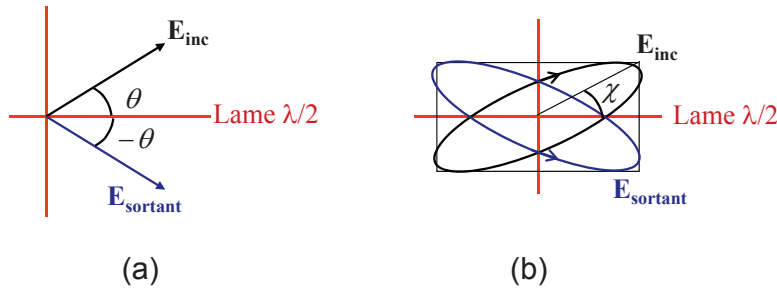


FIGURE 2.3 – Réponse d'une lame demi-onde à différents états de polarisation incidents. (a) Etat linéaire. (b) Etat elliptique.

Considérons maintenant que l'état incident elliptique. On obtient (Figure 2.3.b) :

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \exp(i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}^{\text{out}} = \mathbf{J}_{\lambda/2} \mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ -\sin \chi \exp(i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

L'état de sortie a donc la même ellipticité que l'état incident, un sens de rotation inverse et la direction de son grand axe (azimut) se déduit de celle de l'état incident par une symétrie par rapport aux lignes neutres de la lame.

Exercice : Quel est l'état de sortie lorsque l'état incident est circulaire gauche? Circulaire droit?

Lame quart d'onde

Un déphaseur quart d'onde, ou « lame quart d'onde », est un déphaseur pour lequel $\Delta\varphi = \pi/2$, ce qui signifie que la différence de chemin optique entre les deux états propres est $\delta = \lambda/4$, d'où le terme « quart d'onde ». Dans la base des états propres, et en supposant que l'axe lent est \mathbf{e}_x , sa matrice de Jones a l'expression suivante :

Matrice de Jones d'une lame quart d'onde

$$\mathbf{J}_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-i\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

On peut noter que pour définir la matrice de Jones d'une lame quart d'onde, il faut distinguer l'axe lent et l'axe rapide. En effet, si on suppose maintenant que \mathbf{e}_x est l'axe rapide, on obtient la matrice suivante :

$$\mathbf{J}'_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Considérons un état de polarisation incident elliptique quelconque. L'état émergent est obtenu de la manière suivante :

$$\mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \exp(i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}^{\text{out}} = \mathbf{J}_{\lambda/4} \mathbf{E}^{\text{in}} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \exp(i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Si l'état incident est linéaire ($\Delta\varphi = 0$), son azimut est égal à χ . L'état émergent est une ellipse dont les axes sont les lignes neutres de la lame et dont l'ellipticité est égale à l'angle χ (Figure 2.4.a). **Le sens de rotation de l'ellipse est celui qui permet de ramener l'état linéaire incident sur l'axe lent de la lame.**

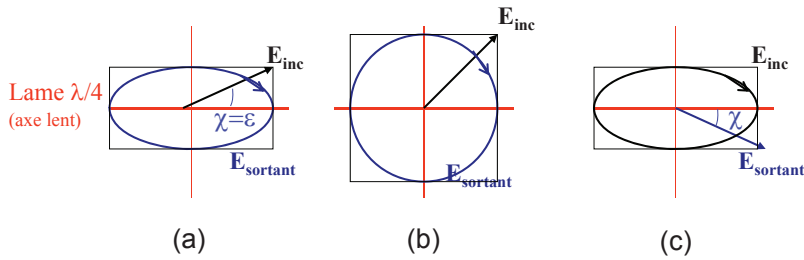


FIGURE 2.4 – Réponse d’une lame quart d’onde à différents états incidents. (a) Etat linéaire d’orientation quelconque. (b) Etat linéaire à 45° de l’axe lent. (c) Etat elliptique dont le grand axe est parallèle à l’axe lent de la lame.

Cela fournit une méthode simple pour générer un état de polarisation d’ellipticité et de sens quelconques à partir d’une polarisation linéaire. En particulier, si l’état incident est orienté à 45° des lignes neutres, l’état émergent est circulaire.

A l’inverse, si l’état de polarisation est elliptique avec des axes parallèles aux lignes neutres de la lame ($\Delta\varphi = \pi/2$) et un ellipticité ε , l’équation (2.36) montre que l’état émergent est linéaire, d’azimut ε (Figure 2.4.c). **La direction de polarisation est obtenue en tournant l’axe lent de la lame de l’angle $|\varepsilon|$ dans le sens de rotation de l’état incident.** Cela fournit une méthode pour mesurer l’ellipticité et le sens de rotation d’un état de polarisation quelconque.

Exercice : Proposez une méthode permettant de générer un état de polarisation circulaire gauche (droit) à partir d’une polarisation linéaire (Figure 2.4.b).

Exercice : Proposez une méthode pour mesurer l’ellipticité et le sens de rotation d’un état de polarisation quelconque.

Lame de phase de déphasage quelconque

Si la lame de phase a un déphasage quelconque $\Delta\varphi$ (et un axe lent parallèle à e_x), sa matrice de Jones exprimée dans ses états propres est :

Matrice de Jones d’une lame de déphasage

$$J_{\Delta\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

On obtient en général un état elliptique dont l’azimut et l’ellipticité dépendent de l’état incident. Par exemple, si l’état incident est linéaire d’azimut χ , on obtient :

$$E^{in} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{bmatrix} \implies E^{out} = J_{\Delta\varphi} E^{in} = \begin{bmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \exp(-i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

La figure 2.5 illustre les états obtenus lorsque $\Delta\varphi$ varie de 0 à 180 degrés et $\alpha = 20^\circ$ ou $\alpha = 70^\circ$.

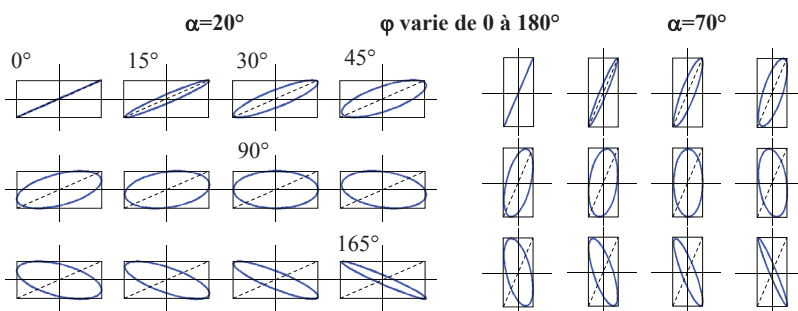


FIGURE 2.5 – Variation de l’état de polarisation de sortie en fonction du retard φ pour deux états de polarisation linéaires d’azimut α différents.

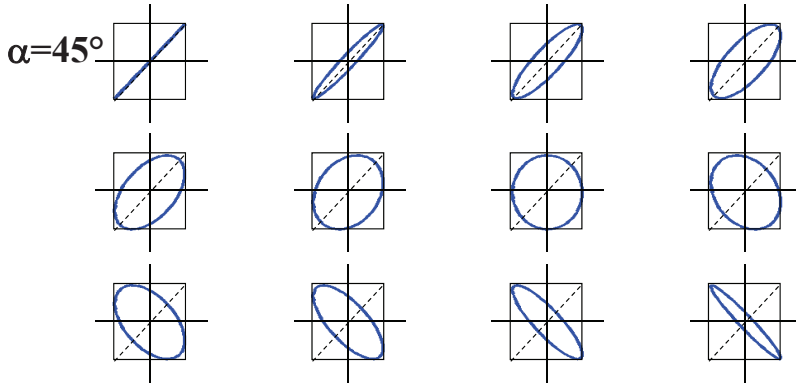


FIGURE 2.6 – Variation de l'état de polarisation de sortie en fonction du retard φ pour un état incident linéaire d'azimut $\alpha = 45^\circ$.

A titre de cas particulier intéressant, on peut noter que si l'état incident est à 45° de l'axe lent ($\chi = 45^\circ$), le vecteur de Jones de l'état de polarisation émergent est proportionnel à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-i\Delta\varphi) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

L'ellipse de polarisation est donc inscrite dans un carré ($A_x = A_y$) (cf. Figure 2.6). L'équation (12) de la fiche 1 conduit alors à un azimut $\alpha = 45^\circ$ quelle que soit la valeur de $\varphi \in [0, 90^\circ]$ et $\alpha = -45^\circ$ quelle que soit la valeur de $\Delta\varphi \in [90, 180^\circ]$. Pour $\varphi = 90^\circ$, l'état obtenu est circulaire et α n'est pas défini. Cela signifie que les axes de l'ellipse de polarisation de l'état émergent sont toujours à $\pm 45^\circ$, et que seule l'ellipticité varie avec φ . L'équation (1.15) permet de montrer que l'ellipticité de l'état émergent* est $|\varepsilon| = \Delta\varphi/2$. Le sens de rotation est droit (c'est le sens qui permet de ramener l'état incident sur l'axe lent de la lame). Pour obtenir un sens de rotation gauche, il faut que l'état incident soit à -45° de l'axe lent de la lame ($\chi = -45^\circ$).

*En effet, d'après les équations (1.13) et (1.15), et en prenant en compte le fait que $\alpha = 45^\circ$, on a :

$$\begin{aligned} \tan \varepsilon = \frac{b}{a} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \Delta\varphi}{1 + \cos \Delta\varphi}} \\ &= \sqrt{\frac{\sin^2(\Delta\varphi/2)}{\cos^2(\Delta\varphi/2)}} = |\tan(\Delta\varphi/2)| \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations trigonométriques suivantes : $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1 = 1 - 2\sin^2(x/2)$.

2.2.3 Rotateur

Un rotateur est un composant dont la matrice de Jones est une matrice de rotation d'angle θ :

Matrice de Jones d'un rotateur

$$J_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

C'est une matrice unitaire dont les états propres sont les états circulaires gauche et droit. Si on exprime cette matrice dans la base de ses vecteurs propres, en supposant que le premier est le sens droit (on utilise la formule de changement de base), on obtient :

$$J_\theta = \begin{bmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

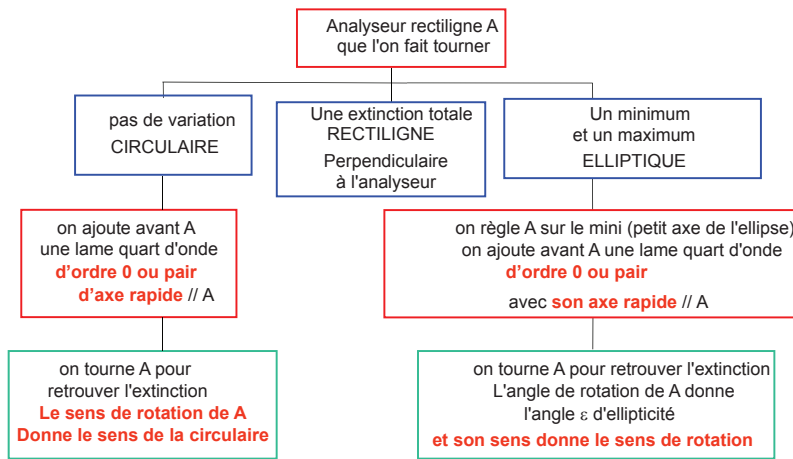
On constate donc qu'un rotateur n'est qu'un cas particulier de déphaseur dont les états propres sont circulaires et donc la retardance est égale à $\Delta\varphi = 2\theta$.

2.3 Analyse et génération de polarisation

On se trouve souvent dans la situation où l'on veut déterminer l'état de polarisation d'une lumière. Par ailleurs, il est également commun qu'on ait besoin de générer un état de polarisation donné. Nous allons montrer comment les composants que nous avons étudié précédemment permettent de réaliser ces deux opérations.

2.3.1 Analyse d'un état de polarisation

Pour déterminer l'état de polarisation d'une lumière quelconque, il suffit d'un analyseur* et d'une lame quart d'onde orientables. La marche à suivre est décrite sur la figure 2.7. Elle se comprend aisément d'après l'analyse que nous avons faite des propriétés de ces deux composants. Les étapes sont les suivantes :



*Le terme « analyseur » désigne un diatténuateur, généralement supposé linéaire et parfait. Pour désigner ce type de composant, on utilise classiquement le terme *polariseur* lorsqu'il est utilisé pour générer un état de polarisation linéaire à partir d'un état de polarisation quelconque, et *analyseur* lorsqu'il est utilisé pour mesurer (analyser) un état de polarisation.

FIGURE 2.7 – Étapes de la mesure d'un état de polarisation incident en utilisant un analyseur linéaire et une lame quart d'onde.

- On fait d'abord tourner l'analyseur jusqu'à obtenir un minimum d'intensité[†]. Si on n'observe strictement aucune variation d'intensité, c'est que la polarisation est circulaire. Si on observe une extinction totale, c'est qu'on a une polarisation linéaire dont la direction est perpendiculaire à celle de l'analyseur (Loi de Malus). Dans tous les autres cas (une variation d'intensité est observée sans que le minimum corresponde à une extinction totale), c'est que la polarisation est elliptique.
- L'azimut est la direction perpendiculaire à celle de l'analyseur conduisant au minimum d'intensité.
- Pour déterminer l'ellipticité, il faut utiliser une propriété de la lame quart d'onde mentionnée dans la section 2.2.2 : si on aligne l'axe lent d'une lame quart d'onde avec le grand axe de l'ellipse de polarisation (et donc l'axe rapide sur le petit axe de l'ellipse), on obtient un état de polarisation linéaire faisant avec l'axe lent de la lame quart d'onde un angle égal à l'ellipticité ε . Si cet angle est positif, le sens de rotation de l'ellipse est gauche, s'il est négatif, il est droit[°].
Pour faire la mesure de l'ellipticité, on place donc une lame quart d'onde avant l'analyseur, axe rapide parallèle à la direction de l'analyseur donnant un minimum. On fait ensuite tourner l'analyseur

[†]On pourrait aussi chercher un maximum mais pour des raisons physiologiques, la détermination visuelle d'un minimum d'intensité est plus précise que celle d'un maximum.

[°]On peut dire que la direction de l'état linéaire produit « suit » le sens de rotation de l'ellipse.

pour retrouver un minimum d'intensité, et la valeur et le signe de cet angle donnent l'ellipticité et le sens de rotation. La même méthode doit être utilisée pour mesurer le sens de rotation d'un état de polarisation circulaire. Dans ce cas, l'orientation de départ de l'analyseur peut être quelconque.

Enfin, il est à noter que pour mesurer le sens de rotation, il faut pouvoir distinguer l'axe rapide de l'axe lent de la lame quart d'onde. Or s'il est simple de déterminer les lignes neutres d'un déphaseur linéaire, il est plus difficile de distinguer l'axe lent et l'axe rapide. Si l'on ne possède pas cette information, on peut seulement mesurer la valeur absolue de l'ellipticité.

2.3.2 Génération d'un état de polarisation

Les composants de polarisation les plus courants sont les polariseurs linéaires. Il est donc facile de générer une polarisation linéaire à partir d'une lumière quelconque (purement polarisée ou non). Pour générer un état de polarisation quelconque, on partira en général d'une polarisation rectiligne. Il existe beaucoup de méthodes différentes pour réaliser cette opération, et nous allons simplement donner un exemple utilisant une lame demi-onde et une lame quart d'onde orientables.

Supposons qu'on veuille créer un état de polarisation d'azimut α et d'ellipticité ε à partir d'un état rectiligne d'azimut 0° . On place d'abord la lame $\lambda/4$, et on oriente son axe lent à un angle ε . Nous avons montré dans la section 2.2.2 qu'on obtient alors un état d'ellipticité ε dont le grand axe est parallèle à l'axe lent de la lame. On place ensuite la lame demi-onde et on l'oriente à l'angle $(\alpha + \varepsilon)/2$ pour obtenir un azimut de α sans modifier son ellipticité (Figure 2.8).

Les méthodes d'analyse et de génération d'états de polarisation que nous venons de décrire font intervenir des composants qu'il faut faire tourner. Elles sont bien adaptées à une procédure manuelle mais ne sont pas forcément faciles à automatiser car elles nécessitent des mouvements mécaniques. Il existe d'autres méthodes qui ne nécessitent pas de mouvement mécanique. Par exemple, on peut utiliser deux lames de phase de déphasages variables et dont les lignes neutres sont orientées à 45° l'une de l'autre. La variation du déphasage peut se commander de manière électrique en utilisant des effets électro-optiques (cellule de Pockels, cristaux liquides...).

Exercice : Essayez de mettre en équations cette méthode en utilisant le formalisme des matrices de Jones.

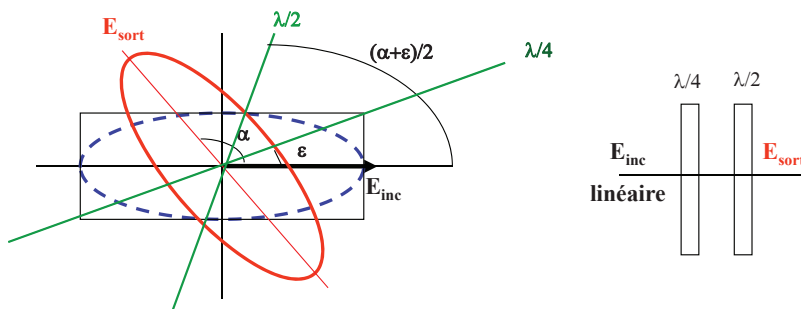


FIGURE 2.8 – Génération d'un état de polarisation quelconque en utilisant une lame demi-onde et une lame quart d'onde.

Mesure du déphasage d'une lame cristalline

On a parfois à mesurer le déphasage $\Delta\varphi$ d'une lame de phase dont on connaît l'orientation des lignes neutres. On peut procéder de la manière suivante. On envoie une polarisation rectiligne orientée à 45° des lignes neutres. Nous avons vu dans la section 2.2.2 que l'état de sortie possède un axe propre à 45° et une ellipticité égale à $\Delta\varphi/2$. On se trouve donc ramené à la mesure d'une ellipticité qu'on peut réaliser avec une lame quart d'onde selon la méthode décrite dans la section 2.3.1.

**PROPAGATION DE LA LUMIÈRE DANS LES
MILIEUX ANISOTROPES**

Origine microscopique de la biréfringence

3

La première partie du cours décrit les états de polarisation et les principaux composants optiques, à travers une approche de type fonctions de transfert s'appuyant sur les vecteurs et matrices de Jones. Dans cette seconde partie, nous allons nous intéresser à une description microscopique de la propagation de la lumière dans les milieux anisotropes : origine microscopique des effets d'anisotropie optique, équation de propagation du champ lumineux et indices optiques, construction des rayons lumineux,

3.1 Quelques exemples de matériaux biréfringents

Outre les cristaux comme la calcite, de nombreux matériaux présentent de la biréfringence : des matériaux naturels ou artificiels formés de fibres, ou des plastiques soumis à une déformation mécanique. L'anisotropie des tissus humains formés de fibres de collagène est utilisée en imagerie médicale, et des pathologies comme la fibrose peuvent être détectées par voie optique.

Particle and Fiber Identification with Polarized Light Microscopy

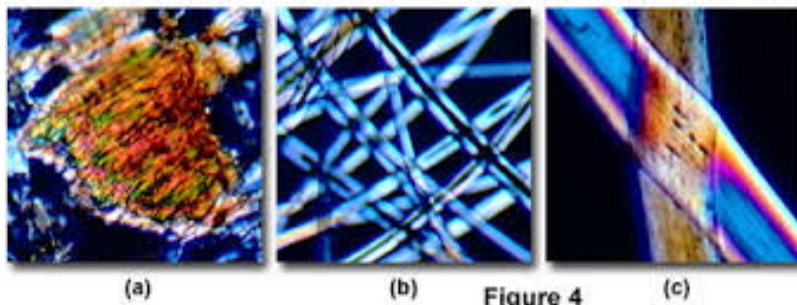


FIGURE 3.1 – Images au microscope polarisant de poudre de bois (a), de fibres de nylon (b) et de cheveux (c).

L'origine de l'anisotropie optique, ou biréfringence, d'un matériau est l'existence d'indices de réfraction prenant des valeurs différentes dans le matériau, en fonction de la direction de polarisation de la lumière et de sa direction de propagation. La description des indices de réfraction d'un milieu s'appuie sur l'électromagnétisme dans la matière*. Dans ce qui suit, nous allons faire quelques brefs rappels concernant la description microscopique de l'électromagnétisme dans la matière, puis nous introduirons deux outils qui permettent de caractériser l'anisotropie optique, la matrice de permittivité diélectrique et l'ellipsoïde des indices.

* Il existe donc un lien fort entre cette seconde partie de notre cours et le cours d'électromagnétisme.

- 3.1 Quelques exemples de matériaux biréfringents . . . 22
- 3.2 Indice complexe d'un milieu et anisotropie optique 23
 - 3.2.1 Mouvement d'une charge et dipôle induit 23
 - 3.2.2 Cas d'un milieu isotrope . . . 23
 - 3.2.3 Cas d'un milieu anisotrope 24
- 3.3 Ellipsoïde des indices . . . 26

3.2 Indice complexe d'un milieu et anisotropie optique

3.2.1 Mouvement d'une charge et dipôle induit

L'électromagnétisme dans la matière décrit la propagation d'un champ électrique à l'intérieur d'un milieu à partir des équations de Maxwell. Ces dernières font intervenir le vecteur déplacement électrique \mathbf{D} . Dans le vide, celui-ci est égal (à un facteur ϵ_0 près) au champ électrique \mathbf{E} . Au contraire, dans la matière le vecteur déplacement peut être très différent du champ incident \mathbf{E} .

Cette différence avec la propagation de la lumière dans le vide vient du fait que le champ électrique lumineux incident déplace des charges dans le milieu, induisant ainsi des dipôles électriques qui peuvent à leur tour rayonner un champ électrique

Nous allons maintenant décrire la réponse du milieu, en prenant en compte l'effet de ces dipôles induits.

Tout dipôle ayant une fréquence propre de résonance, sa réponse à un champ électrique incident dépend fortement de la fréquence (ou pulsation ω) de ce champ incident. Il est donc naturel de décrire la réponse du dipôle en fonction de cette pulsation, c'est à dire d'étudier la réponse du dipôle à une onde monochromatique $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)$ de pulsation ω . Cette "intuition" est justifiée si on fait l'hypothèse que la réponse du milieu au champ incident est linéaire, stationnaire et causale[†]. En effet, nous avons rappelé dans la première partie de ce cours, qu'il est possible de décomposer une lumière non-monochromatique comme une somme de composantes monochromatiques en prenant une transformée de Fourier et en passant dans l'espace des fréquences. Si l'hypothèse de la réponse linéaire est valide, alors la réponse du milieu à un champ poly-chromatique peut se calculer simplement en sommant les contributions des différentes ondes monochromatiques. **Dans cette partie du cours, nous considérons donc une onde lumineuse monochromatique se propageant dans un matériau***.

[†] Ce sont les hypothèses de la théorie de la réponse linéaire.

* Nous utiliserons la notation \mathbf{E}_ω pour le champ électrique associé à l'onde lumineuse sans écrire explicitement la dépendance spatio-temporelle, $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)$.

Dipôle induit et polarisabilité. Considérons un unique dipôle \mathbf{d} excité par un champ monochromatique \mathbf{E}_ω . L'amplitude du dipôle s'écrit

$$\mathbf{d}(\omega) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E}_\omega, \quad (3.1)$$

où ϵ_0 est la permittivité du vide et $\alpha(\omega)$ est la polarisabilité (complexe) du dipôle.

3.2.2 Cas d'un milieu isotrope

Lorsqu'une lumière monochromatique se propage dans un milieu, initialement à l'équilibre, un grand nombre de dipôles \mathbf{d}_j sont induits

par le champ lumineux. La somme de tous ces dipôles, $\sum_j \mathbf{d}_j$, est la polarisabilité du milieu*,

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}_\omega, \quad (3.2)$$

où χ est la susceptibilité (complexe) du milieu[†]. La susceptibilité χ est donc pour un milieu ce qu'est la polarisabilité α pour un seul dipôle. **Dans un milieu isotrope, la susceptibilité est un nombre (complexe).** Nous allons voir ci-après que, dans un milieu présentant une anisotropie optique, la susceptibilité n'est pas un nombre mais une matrice.

Le vecteur déplacement électrique \mathbf{D}_ω des équations de Maxwell s'écrit comme une somme de la contribution du champ incident, $\epsilon_0 \mathbf{E}_\omega$, et de la contribution des dipôles induits du milieu, $\mathbf{P}(\omega)$,

Vecteur déplacement \mathbf{D}_ω dans la matière

$$\mathbf{D}_\omega = \epsilon_0 \mathbf{E}_\omega + \mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \mathbf{E}_\omega. \quad (3.3)$$

On peut également introduire ϵ_r la permittivité (relative) du milieu, $\mathbf{D}_\omega = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \mathbf{E}_\omega$.

L'indice de réfraction n_0 du milieu, défini à partir de la permittivité relative par la formule $\epsilon_r(\omega) = n_0^2(\omega)$, s'exprime alors simplement à partir de la susceptibilité,

Indice de réfraction et susceptibilité

$$n_0^2(\omega) = 1 + \chi(\omega). \quad (3.4)$$

La susceptibilité est le plus souvent de module petit devant l'unité et nous pouvons écrire $n_0 \simeq 1 + \chi(\omega)/2$. Par ailleurs, puisque la susceptibilité est a priori complexe, l'indice de réfraction est également un nombre complexe. Cette propriété prend un sens très clair si on considère le cas simple de la propagation (selon l'axe Oz) d'une onde plane dans le milieu, $\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$. A l'intérieur du milieu, le terme de phase fait intervenir l'indice du milieu et s'écrit

$$e^{i(n_0 kz - \omega t)} = e^{i(\Re[n_0] kz - \omega t)} e^{-\Im[n_0] kz}. \quad (3.5)$$

Ainsi la partie réelle de l'indice $\Re[n_0] \simeq 1 + \Re[\chi]/2$ est associée à la dispersion dans le milieu, alors que sa partie imaginaire $\Im[n_0] \simeq \Im[\chi]/2$ est associée à l'absorption du milieu (atténuation de l'amplitude de l'onde). On retiendra donc qu'un milieu non absorbant possède un indice de réfraction réel. Au contraire, un indice ayant une partie imaginaire non-nulle signale un phénomène d'absorption.

3.2.3 Cas d'un milieu anisotrope

Dans un milieu anisotrope, la réponse du milieu lors de la propagation d'un champ lumineux est, par définition, différente selon les directions

*La polarisabilité est parfois appelée « polarisation » du milieu, terminologie que nous éviterons absolument pour réserver le terme « polarisation » à la polarisation de la lumière.

[†] Remarquons que nous négligeons ici les effets induit par le gradient du champ $\nabla \mathbf{E}_\omega$. Comme nous le verrons au chapitre suivant, cela a une conséquence sur la forme des états de polarisation se propageant sans modification dans le milieu.

de l'espace. Une image physique simple permet de comprendre l'origine de cette anisotropie et est illustrée sur la figure 3.2. Sous l'effet du champ électrique de la lumière, un cristal anisotrope se polarise différemment selon les différents axes car le déplacement des charges (essentiellement des électrons pour le spectre visible) est anisotrope.

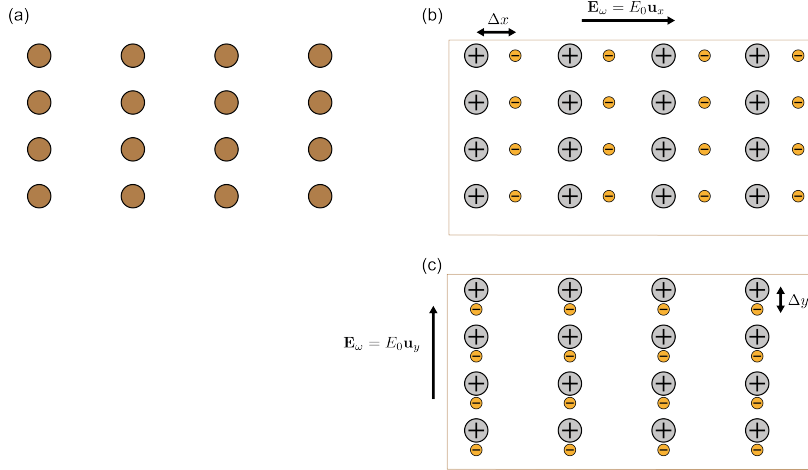


FIGURE 3.2 – (a) Cristal avec une maille anisotrope. (b) Déplacement Δx des électrons sous un champ d'amplitude E_0 selon l'axe x . La polarisabilité induite par le déplacement Δr des électrons (de densité ρ et charge $-e$) se traduit ici par une polarisabilité selon Ox , $P_{x,x} = -\sum_j \rho e \Delta x = \epsilon_0 \chi_{x,x} E_0$ (c) Déplacement Δy des électrons sous un champ d'amplitude E_0 selon l'axe y induisant $P_{y,y} = -\sum_j \rho e \Delta y = \epsilon_0 \chi_{y,y} E_0$. L'anisotropie cristalline entraîne donc une polarisabilité différente selon l'axe y par rapport à celle selon l'axe x , qui se caractérise par $\chi_{x,x} \neq \chi_{y,y}$: la susceptibilité d'un milieu anisotrope n'est pas un simple nombre scalaire, mais un tenseur.

Ainsi, les définitions précédentes du cas isotrope doivent être modifiées pour tenir compte de cette anisotropie : la susceptibilité devient une matrice,

Matrice de polarisabilité dans un milieu anisotrope

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 [\chi(\omega)] \mathbf{E}_\omega = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \chi_{x,x} & \chi_{y,x} & \chi_{z,x} \\ \chi_{x,y} & \chi_{y,y} & \chi_{z,y} \\ \chi_{x,z} & \chi_{y,z} & \chi_{z,z} \end{pmatrix} \mathbf{E}_\omega. \quad (3.6)$$

La permittivité du milieu devient également une matrice, $[\epsilon_r(\omega)] = [1] + [\chi(\omega)]$, et des indices optiques différents apparaissent selon les différents axes du milieu.

Il est important de se souvenir que l'anisotropie optique d'un milieu est associée aux symétries du milieu, indépendamment de la polarisation et de la direction d'incidence de l'onde lumineuse qui s'y propage[†].

Un cristal de symétrie cubique est un milieu isotrope. Les cristaux trigonal, tétragonal et hexagonal sont des milieux anisotropes dits uniaxes (voir ci-dessous) alors que les cristaux orthorhombique, monoclinique et triclinique sont des milieux anisotropes dits biaxes.

La matrice $[\epsilon_r]$ est hermitienne. Lorsque le milieu ne présente pas de pertes par absorption (les indices de réfraction sont donc réels), la matrice $[\epsilon_r]$ est donc réelle et symétrique. Nous considérons dans la suite de ce paragraphe* une matrice $[\epsilon_r]$ réelle et symétrique, qui s'écrit dans la base qui la diagonalise,

$$[\epsilon_r(\omega)] = \begin{pmatrix} \epsilon_{r,x} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{r,y} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{r,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

[†] Bien entendu, selon sa polarisation et sa direction d'incidence sur le milieu, l'onde lumineuse va « voir » différents indices du milieu.

* Nous discuterons des milieux absorbants un peu plus loin.

Notez qu'on retrouve le cas d'un milieu isotrope d'indice n_0 lorsque $n_x = n_y = n_z = n_0$.

3.3 Ellipsoïde des indices

Il est possible d'introduire une représentation graphique de l'anisotropie d'un milieu, appelée **ellipsoïde des indices**. L'ellipsoïde des indices est représenté par les points (x, y, z) tels que

Equation de l'ellipsoïde des indices

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1 \quad (3.8)$$

L'ellipsoïde des indices représente les indices propres du matériau (n_x, n_y, n_z) , indépendamment de toute lumière s'y propageant. Lorsque le milieu est isotrope, l'ellipsoïde des indices est une sphère. En présence d'une anisotropie, l'ellipsoïde des indices n'est pas une sphère mais prend une forme elliptique, comme indiqué sur l'exemple de la figure 3.3.

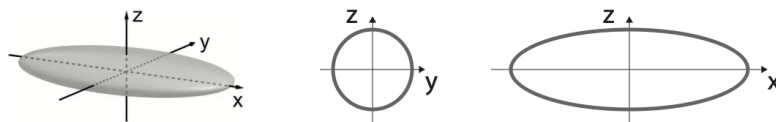


FIGURE 3.3 – Ellipsoïde des indices pour un matériau d'indice $n_x \gg n_y = n_z$. Image 3D (sur la gauche) et coupes 2D passant par l'origine (sur la droite).

Un matériau biréfringent est donc un matériau dont l'ellipsoïde des indices n'est pas une sphère.

Milieu uniaxe. Un milieu dit uniaxe est un milieu avec deux indices différents, un indice ordinaire n_o et un indice extra-ordinaire n_e . Par convention, on porte souvent l'indice extra-ordinaire sur l'axe Oz . Ainsi un milieu uniaxe est tel que $n_x = n_y = n_o$.

Par ailleurs, l'axe selon lequel l'indice est extra-ordinaire est appelé **axe optique***. L'ellipsoïde des indices d'un milieu uniaxe est un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique z ,

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1. \quad (3.9)$$

* L'axe optique est en fait défini comme la direction selon laquelle l'onde lumineuse ne « voit » qu'un seul indice (cf. chapitre 5).

Equation de propagation - polarisations propres et indices

4

Dans ce chapitre, nous étudions la propagation d'une onde lumineuse dans un milieu anisotrope.

Nous discutons les propriétés des valeurs propres et vecteurs propres de polarisation associés à la propagation. Nous considérons dans un premier temps un milieu non-absorbant dans lequel les indices de réfraction sont réels. Dans le dernier paragraphe de cette partie, nous discutons brièvement le cas d'un milieu absorbant.

Une différence, subtile à première vue mais importante, doit être soulignée à propos des indices de réfraction :

les indices de réfraction vus par une onde lumineuse se propageant dans un milieu sont, a priori, différents des indices du milieu.

D'une part, la description d'un milieu biréfringent (chapitre précédent) est fondée sur la matrice de permittivité $[\epsilon_r(\omega)]$ qui caractérise la réponse du milieu (à travers sa polarisabilité \mathbf{P}). On introduit ainsi les indices de réfraction associés à $[\epsilon_r(\omega)]$ et l'ellipsoïde des indices qui condense l'information sur les différents indices du milieu. D'autre part, la propagation d'une onde lumineuse fait intervenir (à travers les équations de Maxwell) les indices de réfraction vus par l'onde. Ces indices vus par l'onde décrivent l'effet de la réponse du milieu sur l'onde incidente. Ainsi, il ne s'agit pas seulement de décrire la réponse d'un milieu, mais également la contre-réaction de cette réponse sur l'onde elle-même. Cette différence se caractérise par le fait que les indices vus par l'onde diffèrent des indices propres du milieu.

4.1 Propagation de la lumière dans la matière

Pour un milieu présentant une anisotropie optique, la description de la propagation d'une onde lumineuse, à travers les indices de réfraction vus par l'onde, s'appuie sur la solution aux équations de Maxwell.

4.1.1 Equation de propagation

L'équation (3.3) entre \mathbf{D}_ω et \mathbf{E}_ω fait intervenir la matrice de permittivité diélectrique du milieu. Les équations de Maxwell relient également \mathbf{D}_ω et \mathbf{E}_ω , ce qui va nous permettre d'explicitier l'équation de propagation de l'onde dans le milieu.

Les équations de Maxwell dans un milieu non-magnétique et sans source s'écrivent,

$$\nabla \cdot \mathbf{D}_\omega = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_\omega = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E}_\omega = -\frac{\partial \mathbf{B}_\omega}{\partial t} \quad \nabla \times \frac{\mathbf{B}_\omega}{\mu_0} = \frac{\partial \mathbf{D}_\omega}{\partial t},$$

4.1	Propagation de la lumière dans la matière	27
4.1.1	Equation de propagation	27
4.1.2	Equation aux valeurs propres pour \mathbf{D}_ω	28
4.1.3	Retour sur l'ellipsoïde des indices	29
4.2	Polarisations propres de propagation	29
4.2.1	Propriétés des polarisations propres	29
4.2.2	Orientation des vecteurs propres	30
4.3	Cas d'un milieu absorbant	32

à partir desquelles on obtient

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_\omega) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_\omega}{\partial t^2}. \quad (4.1)$$

Dans le cas d'une onde plane monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ (où \mathbf{u} est un vecteur unitaire)

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (4.2)$$

cette expression s'explique sous la forme

$$\mathbf{D}_\omega = -\frac{1}{\mu_0 \omega^2} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_\omega) = \frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} [\mathbf{E}_\omega - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_\omega) \mathbf{u}]. \quad (4.3)$$

A ce stade, par analogie avec les milieux isotropes, on introduit un nombre n , appelé **indice effectif de réfraction vu par l'onde lumineuse**, tel que $n = \omega/kc$. Cet indice effectif de réfraction correspond à l'indice vu par l'onde se propageant dans le milieu (ce lien deviendra clair plus loin), et il ne correspond pas à un module carré des indices propres du matériau*, $n \neq \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$!

*Il faut garder à l'esprit que les indices notés n_x, n_y et n_z sont ceux du matériau, indépendamment de la présence de lumière. Les indices noté n (ici), n' et n'' (plus loin) sont les indices de réfraction vu par la lumière et dépendent du vecteur d'onde \mathbf{k} .

On peut alors écrire la relation entre \mathbf{D}_ω et \mathbf{E}_ω utilisant cet indice n ,

Vecteur déplacement et vecteur champ électrique

$$\mathbf{D}_\omega = \epsilon_0 n^2 [\mathbf{E}_\omega - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_\omega) \mathbf{u}] \quad (4.4)$$

Remarquons que dans un milieu sans charges comme le vide, la polarisabilité \mathbf{P} est nulle et le second terme de l'équation (3.3) est nul. Ainsi, le vecteur déplacement \mathbf{D}_ω est colinéaire au champ \mathbf{E}_ω et les équations de Maxwell donnent $\nabla \cdot \mathbf{E}_\omega = 0$, c'est à dire que le vecteur d'onde \mathbf{k} est orthogonal au vecteur champ \mathbf{E}_ω . Dans un milieu isotrope, le mouvement des charges est isotrope et le vecteur \mathbf{P} est colinéaire au champ \mathbf{E}_ω , ce qui implique que le second terme de l'expression précédente est également nul. Par conséquent, le vecteur d'onde \mathbf{k} est également orthogonal au vecteur champ \mathbf{E}_ω .

Au contraire, **une caractéristique importante des milieux anisotropes est que le vecteur d'onde \mathbf{k} n'est pas orthogonal au vecteur champ \mathbf{E}_ω** . Cela vient du fait que le vecteur déplacement \mathbf{D}_ω n'est pas aligné avec celui du champ \mathbf{E}_ω , eut égard à la matrice de susceptibilité.**

**Dans tous les cas, isotrope ou anisotrope, le vecteur d'onde \mathbf{k} est orthogonal au vecteur déplacement \mathbf{D}_ω (cf. équations de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{D}_\omega = 0$.)

4.1.2 Equation aux valeurs propres pour \mathbf{D}_ω

Nous avons établi l'équation de propagation d'une onde lumineuse dans un milieu anisotrope Eq. (4.4). Nous pouvons écrire cette équation en introduisant la matrice $[P_{\mathbf{u}}]$ de projection selon le vecteur \mathbf{u} , $[P_{\mathbf{u}}] = \mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger$

$$\mathbf{D}_\omega = \epsilon_0 n^2 (\mathbf{E}_\omega - [P_{\mathbf{u}}] \mathbf{E}_\omega). \quad (4.5)$$

Par ailleurs, nous avons par définition $\mathbf{E}_\omega = [\epsilon_r(\omega)]^{-1} \mathbf{D}_\omega / \epsilon_0$, ce qui nous conduit à l'équation ($\mathbb{1}$ étant la matrice identité),

Equation aux valeurs propres pour la propagation

$$\frac{\mathbf{D}_\omega}{n^2} = (\mathbb{1} - [P_{\mathbf{u}}])[\epsilon_r(\omega)]^{-1} \mathbf{D}_\omega = [A_{\mathbf{u}}] \mathbf{D}_\omega. \quad (4.6)$$

Il s'agit d'une équation aux valeurs propres faisant intervenir la matrice $[A_{\mathbf{u}}]$, qui dépend de la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} (car $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$).

Les vecteurs propres de cette équation sont les vecteurs de polarisation qui se propagent dans le milieu sans modification de leur polarisation. Les valeurs propres de cette équation donnent les indices associés à ces vecteurs propres de polarisation.

Il est important de souligner que cette équation aux valeurs propres fait intervenir l'indice n vu par l'onde sous la forme $1/n^2$. Nous verrons plus loin que les modifications des propriétés de biréfringence induites par des effets électro-optique, élasto-optique ou encore magnétique se manifestent par une modification de l'équation aux valeurs propres. Par conséquent, ces modifications s'écriront sous la forme d'une petite variation $\Delta(1/n^2)$ du terme $1/n^2$.

4.1.3 Retour sur l'ellipsoïde des indices

En retrouve l'ellipsoïde des indices introduite au chapitre précédent en multipliant l'équation (4.4) par \mathbf{D}_ω (avec la notation $D = \|\mathbf{D}_\omega\|$),

$$\frac{D^2}{n^2} = \epsilon_0 \mathbf{D}_\omega \cdot \mathbf{E}_\omega = \mathbf{D}_\omega \cdot [\epsilon_r(\omega)]^{-1} \mathbf{D}_\omega = \frac{D_x^2}{n_x^2} + \frac{D_y^2}{n_y^2} + \frac{D_z^2}{n_z^2}, \quad (4.7)$$

où le vecteur déplacement a pour composantes $\mathbf{D}_\omega = (D_x, D_y, D_z)$ dans le référentiel cartésien considéré. En effet, l'ellipsoïde des indices est définie par le lieu des points M tel que

$$\mathbf{OM} = (x, y, z) = n \frac{\mathbf{D}_\omega}{D}. \quad (4.8)$$

4.2 Polarisations propres de propagation

4.2.1 Propriétés des polarisations propres

La matrice $[A_{\mathbf{u}}]$ est une matrice 3×3 et possède a priori trois valeurs propres. Nous allons voir qu'en réalité une des valeurs propres est nulle.

Pour cela nous considérons une base constituée du vecteur \mathbf{u} et deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} orthonormaux. Puisque $[P_{\mathbf{u}}]$ est le projecteur sur le vecteur \mathbf{u} , la matrice $\mathbb{1} - [P_{\mathbf{u}}]$ est contenu dans le plan (\mathbf{v}, \mathbf{w}) orthogonal à \mathbf{u} , appelé le plan d'onde*. Ainsi, seule les composantes de $[A_{\mathbf{u}}]$ dans le

*Par définition, le plan d'onde est le plan perpendiculaire au vecteur d'onde.

plan d'onde joue un rôle dans la propagation et seuls les deux vecteurs et deux valeurs propres de $[A_{\mathbf{u}}]$ dans le plan d'onde sont à déterminer.

Nous pouvons traduire en termes matriciels cette réflexion. La matrice $\mathbb{1} - [P_{\mathbf{u}}]$ s'écrit simplement

$$\mathbb{1} - [P_{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Par ailleurs, si on considère un milieu non-absorbant dont la matrice $[\epsilon_r(\omega)]^{-1}$ est réelle et symétrique, nous pouvons écrire,

$$[A_{\mathbf{u}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .. & .. & .. \\ .. & a & c \\ .. & c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .. & a & c \\ .. & c & b \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Nous sommes donc amenés à diagonaliser la matrice 2x2 dont les coefficients sont les termes a , b et c . Celle-ci étant symétrique et à coefficients réels, elle possède

- deux valeurs propres $1/n^2$ et $1/n'^2$
- deux vecteurs propres orthogonaux \mathbf{D}'_{ω} et \mathbf{D}''_{ω} à coefficients réels.

Il est important de noter que les vecteurs propres \mathbf{D}'_{ω} et \mathbf{D}''_{ω} étant à coefficients réels, ils correspondent à des polarisations linéaires*.

*Pour rappel, comme nous l'avons vu avec les vecteurs de Jones du cours précédent, une polarisation elliptique contient un terme de partie imaginaire non nulle.

En conclusion, pour un vecteur d'onde donné \mathbf{k} dans un milieu biréfringent non-absorbant, il existe deux polarisations propres qui sont linéaires et orthogonales[†].

Notons que l'approche suivie néglige une éventuelle réponse du milieu au gradient local du champ $\nabla \mathbf{E}_{\omega}$ et ne considère que la réponse dépendant de l'amplitude du champ \mathbf{E}_{ω} . Le fait que les polarisations propres soient linéaires découlent de ce point. Dans certains matériaux, la réponse du milieu au gradient du champ \mathbf{E}_{ω} est prépondérante et ne peut pas être négligée. Dans ce second cas, on trouve que les polarisations propres sont les polarisations circulaires*.

* Voir par exemple la section IV du chapitre 2 du livre « Polarisation de la lumière » de S. Huard (Ed. Masson, 1993).

4.2.2 Orientation des vecteurs propres

Comme évoqué précédemment, dans un milieu isotrope, les vecteurs \mathbf{E}_{ω} et \mathbf{D}_{ω} sont parallèles et transverses au vecteur d'onde \mathbf{k} . Il en est ainsi également pour les vecteurs \mathbf{B}_{ω} et \mathbf{H}_{ω} . Le vecteur de Poynting[†] $\mathbf{R}_{\omega} \propto \mathbf{E}_{\omega} \times \mathbf{H}_{\omega}$ est donc parallèle au vecteur d'onde \mathbf{k} (voir figure 4.1a).

Dans un milieu anisotrope,

- les vecteurs \mathbf{E}_{ω} et \mathbf{D}_{ω} ne sont pas parallèles
- le vecteur de Poynting \mathbf{R}_{ω} n'est pas parallèle au vecteur d'onde \mathbf{k} : la direction de propagation du rayon lumineux (et de l'énergie) n'est plus celle de associée à l'évolution de la phase (direction portée par \mathbf{k})
- \mathbf{D}_{ω} reste orthogonal à \mathbf{k} ; \mathbf{E}_{ω} reste orthogonal à \mathbf{R}_{ω}

[†]Le vecteur de Poynting indique la direction du rayon lumineux, c'est à dire la direction de propagation de l'énergie.

- le plan défini par les vecteurs \mathbf{D}_ω et \mathbf{k} , appelé le plan de polarisation, contient également les vecteurs \mathbf{E}_ω et \mathbf{R}_ω (il s'agit du plan orthogonal à $\mathbf{B}_\omega = \mu_0 \mathbf{H}_\omega$)

La figure 4.1b illustre l'orientation des vecteurs dans un milieu anisotrope.

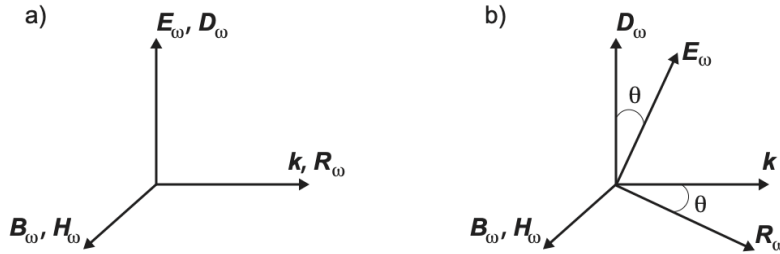


FIGURE 4.1 – a) Vecteurs associés à la propagation de la lumière dans un milieu isotrope. b) Vecteurs associés à la propagation de la lumière dans un milieu anisotrope.

Détermination des polarisations propres à partir de l'ellipsoïde des indices. Il est possible d'utiliser l'ellipsoïde des indices pour déterminer les vecteurs propres de polarisation d'une onde lumineuse se propageant dans un milieu anisotrope.

Rappelons d'abord qu'un point M de coordonnées (x_0, y_0, z_0) sur l'ellipsoïde des indices correspond à un vecteur \mathbf{D}_ω tel que $x_0 = nD_x/D$, $y_0 = nD_y/D$, $z_0 = nD_z/D$.

Par ailleurs, le champ \mathbf{E}_ω est tel que $\mathbf{E}_\omega = \epsilon_0^{-1}[\epsilon_r]^{-1}\mathbf{D}_\omega$, ce qui s'écrit dans la base propre de la matrice permittivité,

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\epsilon_0} \begin{bmatrix} D_x/n_x^2 \\ D_y/n_y^2 \\ D_z/n_z^2 \end{bmatrix} = \frac{D}{\epsilon_0 n} \begin{bmatrix} x_0/n_x^2 \\ y_0/n_y^2 \\ z_0/n_z^2 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Le vecteur $(x_0/n_x^2, y_0/n_y^2, z_0/n_z^2)$ est normal à l'ellipsoïde des indices au point M : le champ \mathbf{E}_ω est donc normal* à l'ellipsoïde des indices au point M .

Le champ magnétique est lui orthogonal à \mathbf{E}_ω et \mathbf{D}_ω : \mathbf{B}_ω est donc tangent à l'ellipsoïde des indices au point M .

Nous pouvons maintenant établir les vecteurs associés à une onde lumineuse de vecteur \mathbf{k} se propageant dans le milieu anisotrope :

- \mathbf{D}_ω se trouve dans le plan d'onde (orthogonal à \mathbf{k}), il est donc à l'intersection de l'ellipsoïde des indices et du plan orthogonal à \mathbf{k} (ce qui définit une ellipse)
- \mathbf{E}_ω se trouve à normal à l'ellipsoïde des indices au point correspondant à \mathbf{D}_ω
- \mathbf{B}_ω est dans le plan d'onde et tangent à l'ellipsoïde
- les deux vecteurs propres \mathbf{D}'_ω et \mathbf{D}''_ω sont orthogonaux et appartiennent au plan d'onde : ces deux vecteurs se trouvent sur les axes de l'ellipse (voir figure 4.2)

Cas d'un milieu uniaxe. Un milieu uniaxe possède deux indices, un indice ordinaire $n_x = n_y = n_o$ et un indice extra-ordinaire $n_z = n_e$. L'ellipse qui coupe l'ellipsoïde des indices dans le plan d'onde a toujours un de ses axes de longueur n_o , perpendiculaire à l'axe optique : c'est la polarisation propre appelée **polarisation ordinaire**. Le champ ordinaire \mathbf{E}_o correspondant, normal à l'ellipsoïde des indices, est parallèle au

*On rappelle que le vecteur normal à une surface définie par $f(x, y, z) = 0$, en un point $P = (x_0, y_0, z_0)$, est donné par le gradient de f en P : $\nabla f(x, y, z)|_{x_0, y_0, z_0}$.

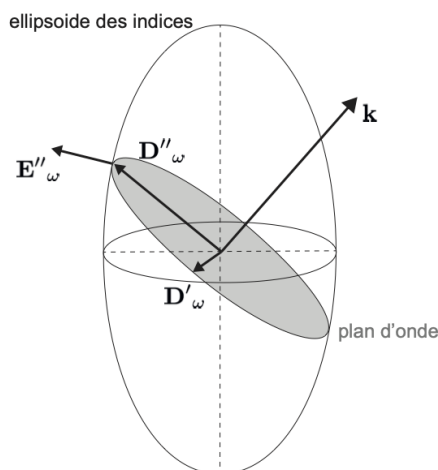


FIGURE 4.2 – Représentation 3D de l'ellipsoïde des indices d'un milieu uniaxe. Le vecteur d'onde \mathbf{k} considéré est indiqué sur la figure. Les polarisations propres \mathbf{D}'_ω et \mathbf{D}''_ω se trouvent dans le plan orthogonal à \mathbf{k} , appelé le plan d'onde. Les vecteurs \mathbf{E}'_ω (non représenté sur la figure) et \mathbf{E}''_ω sont normaux à la surface des indices, au point indiquant la direction des vecteurs propres \mathbf{D}'_ω et \mathbf{D}''_ω .

vecteur propre $\mathbf{D}'_\omega = \mathbf{D}_o$. C'est l'origine de la dénomination « ordinaire », situation identique à celle du milieu isotrope.

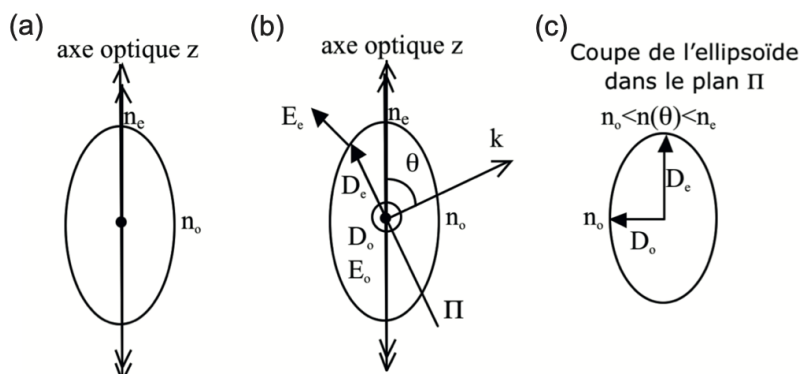


FIGURE 4.3 – Géométrie des polarisations propres à partir de l'ellipsoïde des indices pour un milieu uniaxe.

La seconde polarisation propre $\mathbf{D}''_\omega = \mathbf{D}_e$ se trouve dans le plan de l'axe optique et du vecteur d'onde, et correspond à un indice intermédiaire entre n_o et n_e . Le champ correspond \mathbf{E}_e est orthogonal à \mathbf{E}_o (voir figure 4.3b).

4.3 Cas d'un milieu absorbant

En présence d'absorption, les indices de réfraction possèdent une partie imaginaire non-nulle et la matrice de permittivité dans la base propre du milieu s'écrit

$$[\epsilon_r(\omega)] = \begin{bmatrix} \Re[\epsilon_{r,x}] + i \Im[\epsilon_{r,x}] & 0 & 0 \\ 0 & \Re[\epsilon_{r,y}] + i \Im[\epsilon_{r,y}] & 0 \\ 0 & 0 & \Re[\epsilon_{r,z}] + i \Im[\epsilon_{r,z}] \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

La matrice $[A_u]$ n'est donc plus réelle et la démonstration précédente n'est plus valide.

Nous n'allons pas ici dériver la solution à l'équation aux valeurs propres en présence d'absorption, solution qui est présentée dans le livre de « Polarisation de la lumière » - S. Huard à la section VI. du chapitre 2. Il faut cependant retenir que :

Les vecteurs propres de polarisation \mathbf{D}'_{ω} et \mathbf{D}''_{ω} d'un milieu absorbant sont identiques à ceux d'un milieu non-absorbant qui a pour permittivité la partie réelle de la permittivité du milieu absorbant. La partie imaginaire de la permittivité se manifeste donc par une atténuation (ou absorption) des vecteurs propres lors de leur propagation.

Lorsque l'absorption des deux vecteurs propres diffère, la différence d'atténuation des deux polarisations propres est appelée diatténuation, comme cela avait été introduit dans la première partie du cours faisant intervenir les matrices de Jones.

Propagations des rayons et vecteurs d'onde dans un milieu anisotrope

5

Dans un milieu anisotrope, nous avons vu que des indices de réfraction différents sont vus par les différentes polarisations de la lumière qui peuvent se propager. Ces différences dans l'indice de réfraction Δn donnent essentiellement lieu à trois effets :

- un **déphasage** entre les deux polarisations propres se crée au cours de la propagation – effet issu d'une différence dans la partie réelle des indices
- un phénomène, appelé **double réfraction**, de séparation spatiale des rayons optiques correspondant aux deux polarisations propres – effet issu d'une différence dans la partie réelle des indices
- un phénomène de **diatténuation** – effet issu d'une différence dans la partie imaginaire des indices

Dans la suite, nous allons considérer un milieu non-absorbant. Ainsi les indices sont réels et leur différence peut induire un déphasage et une double réfraction. Afin de décrire ces deux effets, nous allons dans cette partie introduire deux surfaces :

- la **surface des indices** qui permet d'évaluer les indices vus par l'onde lumineuse se propageant avec un vecteur d'onde \mathbf{k}
- la **surface des vitesses radiales** qui permet de tracer le lieu des rayons lumineux dans le milieu anisotrope

5.1	Equation de Fresnel	34
5.2	Surface des indices	35
5.2.1	Cas d'un milieu uniaxe	35
5.2.2	Cas d'un milieu biaxe	36
5.3	Surface des vitesses radiales	37

5.1 Equation de Fresnel

Nous considérons un vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ et un milieu décrit, dans la bases de ses états propres par une matrice de permittivité diélectrique diagonale (faisant intervenir les indices propres du milieu n_x, n_y et n_z). Cherchons à établir une équation pour les valeurs propres $n'(\mathbf{u})$ et $n''(\mathbf{u})$ de l'équation (4.6), c'est à dire les solutions de $\text{Det} \left([A_{\mathbf{u}}] - \frac{1}{n^2} \mathbb{1} \right) = 0$.

Pour un vecteur $\mathbf{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$, nous avons

$$\mathbb{1} - [P_{\mathbf{u}}] = \begin{pmatrix} 1 - \alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & 1 - \beta^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & 1 - \gamma^2 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

On obtient la matrice $[A_{\mathbf{u}}]$ en multipliant $\mathbb{1} - [P_{\mathbf{u}}]$ par la matrice diagonale $[\epsilon_r]^{-1}$, et finalement on cherche les solutions de l'équation*

* Ici Det est le déterminant de la matrice.

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha^2}{n_x^2} - \frac{1}{n^2} & -\frac{\alpha\beta}{n_y^2} & -\frac{\alpha\gamma}{n_z^2} \\ -\frac{\alpha\beta}{n_x^2} & \frac{1-\beta^2}{n_y^2} - \frac{1}{n^2} & -\frac{\beta\gamma}{n_z^2} \\ -\frac{\alpha\gamma}{n_x^2} & -\frac{\beta\gamma}{n_y^2} & \frac{1-\gamma^2}{n_z^2} - \frac{1}{n^2} \end{pmatrix} = 0. \quad (5.2)$$

Après quelques lignes de calcul (sans intérêt), cette équation s'écrit sous la forme (symétrique),

Equation de Fresnel

$$\alpha^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) + \beta^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_z^2} \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_x^2} \right) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Cette équation est appelée équation de Fresnel aux indices* et ses solutions sont les indices propres vus par l'onde, $n'(\mathbf{u})$ et $n''(\mathbf{u})$.

*Un peu d'épistémologie : Fresnel obtint cette équation vers 1821, bien avant les équations de Maxwell (1865) ; pour la dériver, Fresnel appuya son raisonnement sur l'hypothèse que la lumière est une onde transverse et sur la conservation de l'énergie.

5.2 Surface des indices

La surface des indices est une représentation graphique des indices vus par une onde se propageant dans le milieu avec un vecteur d'onde \mathbf{k} .

Puisqu'il y a deux indices propres $n'(\mathbf{u})$ et $n''(\mathbf{u})$ pour chaque vecteur d'onde, il y a deux nappes. Pour chaque direction \mathbf{u} (repérée par rapport à l'origine O), on place les points N' et N'' à des distances correspondant aux indices $n'(\mathbf{u})$ et $n''(\mathbf{u})$ vus par l'onde, $\mathbf{ON}' = n'(\mathbf{u})\mathbf{u}$ et $\mathbf{ON}'' = n''(\mathbf{u})\mathbf{u}$.

5.2.1 Cas d'un milieu uniaxe

Nous considérons $n_x = n_y = n_o$ et $n_z = n_e$. Par ailleurs, nous introduisons les notations $\mathbf{ON} = (X, Y, Z) = (n\alpha, n\beta, n\gamma)$. L'équation de Fresnel s'écrit alors

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \left[(X^2 + Y^2) \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) + Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \right] = 0 \quad (5.4)$$

et peut se mettre sous la forme

Surface des indices d'un milieu uniaxe

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2} \right) \left(\frac{X^2 + Y^2}{n_e^2} + \frac{Z^2}{n_o^2} - 1 \right) = 0. \quad (5.5)$$

Cette dernière expression nous indique que

- la solution $n = n_o$ est valable quelle que soit l'orientation du vecteur d'onde \mathbf{u} (annulation du terme de gauche) ; cette solution correspond à une nappe ayant la forme d'une sphère de rayon n_o
- la seconde solution (annulation du terme de droite) est celle d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe Z ; cette solution vaut $n = n_o$ selon l'axe Z et $n = n_e$ dans les directions perpendiculaires à Z

Remarquons que pour un vecteur d'onde selon l'axe Z , les deux solutions sont identiques et égales à n_o . Cet axe est appelé **axe optique du milieu uniaxe**. La figure 5.1 présente la surface des indices dans le cas d'un milieu uniaxe positif, $n_e > n_o$.

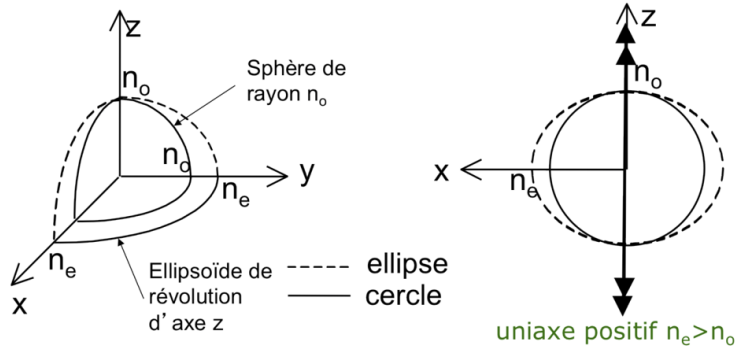


FIGURE 5.1 – Surface des indices dans un milieu uniaxe positif $n_x = n_y = n_o < n_z = n_e$. Elle est constituée d'une sphère de rayon n_o et d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe z , appelé axe optique du matériau.

5.2.2 Cas d'un milieu biaxe

Revenons au cas général où les trois indices propres sont différents, par exemple $n_x < n_y < n_z$. Nous retrouvons les formes simples du cas uniaxe uniquement dans les plans de coupe de la surface avec les plans $X = 0, Y = 0$ et $Z = 0$. Par exemple dans le plan Oxz ($Y = 0$), nous obtenons

Surface des indices d'un milieu biaxe

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_y^2}\right) \left(\frac{X^2}{n_z^2} + \frac{Z^2}{n_x^2} - 1\right) = 0. \tag{5.6}$$

Puisqu'il s'agit d'un plan de coupe, nous obtenons un cercle $n = n_y$ pour l'annulation du premier terme et une ellipse de grand axe $X = n_z$ et de petit axe $Z = n_x$ pour le second terme.

Par permutations circulaires, nous pouvons reconstruire les trois intersections pour les trois plans. La façon dont ces intersections se connectent est représentée sur la figure 5.2. Il faut imaginer l'allure globale avec deux nappes qui se rejoignent en quatre points dans les directions ON et ON' représentée sur la partie droite de la figure. Ce sont les seules directions de propagation pour lesquelles il n'y a qu'un seul indice, correspondant à la valeur intermédiaire entre les indices propres du milieu. Ces deux directions sont les axes optiques du milieu, que l'on appelle un milieu biaxe.

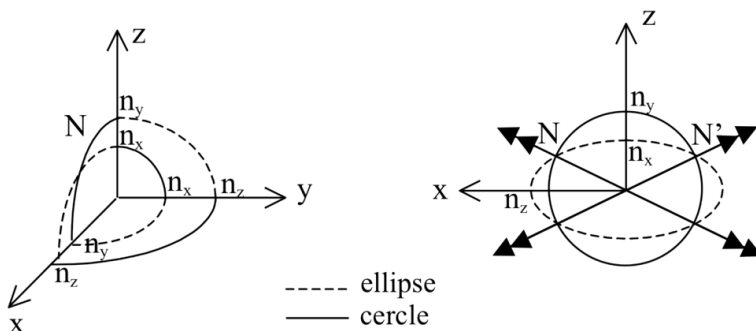


FIGURE 5.2 – Surface des indices dans un milieu avec trois indices $n_x < n_y < n_z$: surface à deux nappes dont les seules coupes dans les plans Oxy, Oxz et Oyz sont représentés ici. La coupe dans le plan Oxz (sur la droite) montre qu'il existe deux directions ON et ON' pour lesquelles il n'y a qu'un seul indice, ici n_y . La présence de deux axes optiques est l'origine de dénomination milieu biaxe.

5.3 Surface des vitesses radiales

La surface des vitesses radiales est une représentation graphique des vitesses radiales le long d'une direction de rayon lumineux, c'est à dire le long d'une direction donnée par un vecteur de Poynting \mathbf{R} (la définition d'une vitesse radiale pour un rayon lumineux est rappelée sur la figure 5.3).

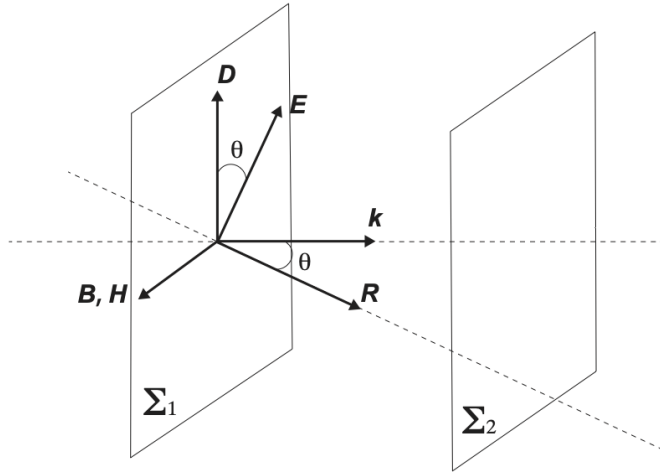


FIGURE 5.3 – La vitesse de phase v_ϕ est la vitesse de propagation entre deux plans Σ_1 et Σ_2 le long du vecteur d'onde, elle est par définition égale à $v_\phi = c/n$. La vitesse radiale v_r est la vitesse de propagation entre deux plans Σ_1 et Σ_2 le long du vecteur de Poynting, elle est égale à $v_r = v_\phi/\cos(\theta) = c/n \cos(\theta)$.

Il est important de noter qu'indice et vitesse radiale sont très simplement reliés. Ainsi, il est possible de remplacer les indices vus par l'onde dans l'équation de Fresnel aux indices par les vitesses radiales correspondantes. Nous obtenons ainsi une forme nouvelle de l'équation, appelée équation de Fresnel aux vitesses radiales.

Précédemment nous avons établi que lorsque le vecteur d'onde de direction $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$ est fixé, il existe deux indices $n'(\mathbf{u})$ et $n''(\mathbf{u})$ solutions de l'équation de Fresnel aux indices et nous avons tracé la surface des indices à deux nappes correspondant à ces deux solutions. De façon analogue, si nous fixons le vecteur de Poynting de direction $\mathbf{u}_R = \mathbf{R}/R$, il existe deux vitesses radiales v'_r et v''_r solutions de l'équation de Fresnel aux vitesses radiales et nous pouvons tracer la surface des vitesses radiales à deux nappes correspondant à ces deux solutions. L'équation de Fresnel aux vitesses radiales s'écrit

Equation de Fresnel aux vitesses radiales

$$\frac{\alpha_R^2 v_x^2}{v^2 - v_x^2} + \frac{\beta_R^2 v_y^2}{v^2 - v_y^2} + \frac{\gamma_R^2 v_z^2}{v^2 - v_z^2} = 0, \tag{5.7}$$

où la direction $\mathbf{u}_R = \mathbf{R}/R$ du vecteur de Poynting est repérée par les coordonnées $(\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$ et les vitesses associées aux propriétés du milieu s'écrivent $v_x = c/n_x$, $v_y = c/n_y$ et $v_z = c/n_z$. Les nappes de la surface des vitesses sont similaires à celles de la surface des indices (dans les deux cas il s'agit des propriétés du milieu vues par la lumière qui se propage), mais les points caractéristiques des nappes sur les axes font intervenir l'inverse des indices du matériau c/n_j ou $1/n_j$.

Quelques exemples de surfaces des vitesses radiales sont présentés en figure 5.4.

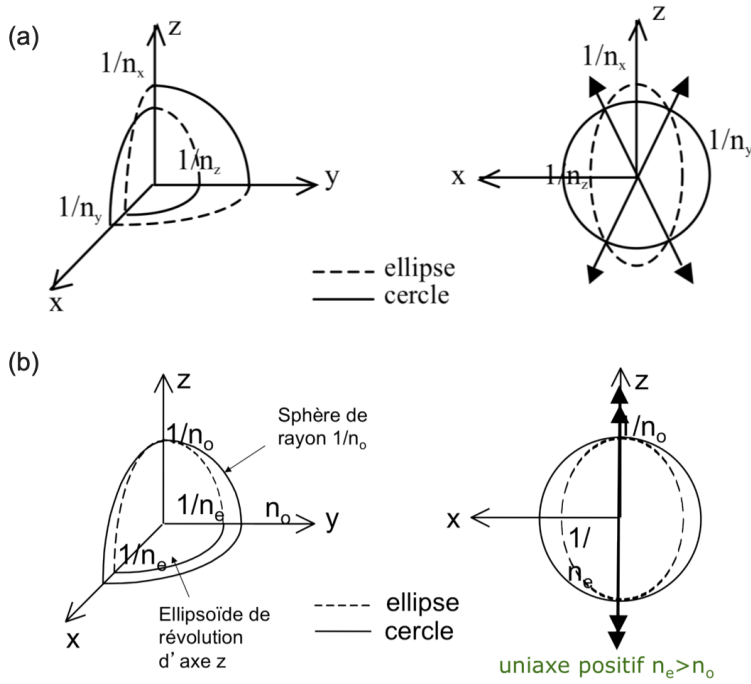


FIGURE 5.4 – (a) Surface des vitesses dans un milieu biaxe avec $n_x < n_y < n_z$: surface à deux nappes dont on a représenté ici uniquement les coupes dans les plans Oxy , Oxz et Oyz . La figure de droite dans le plan Oxz montre qu'il existe deux directions de rayons pour lesquelles il n'y a qu'une seule vitesse, dans ce cas égale à $1/n_y$. (b) Surface des vitesses dans un milieu uniaxe avec deux indices $n_x = n_y = n_o < n_z = n_e$. Elle est constituée d'une sphère de rayon $1/n_o$ et d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe z , axe optique du matériau.

Construction des rayons à partir de la surface des vitesses radiales

6

Nous avons vu que deux indices de réfraction n' et n'' sont vus par une onde lumineuse de fréquence $\omega/2\pi$ se propageant dans un milieu anisotrope. Ces deux indices conduisent à un phénomène de double réfraction : à l'interface entre un milieu isotrope (un seul indice de réfraction) et un milieu anisotrope, deux rayons réfractés (associés à n' et à n'' respectivement) vont se propager dans le milieu anisotrope. Puisque la réfraction à une interface dépend de la différence d'indice entre les deux milieux de part et d'autre de l'interface, le phénomène de réfraction pour l'onde voyant l'indice n' sera différent de celui de l'onde voyant l'indice n'' , donnant ainsi lieu à un dédoublement des images, comme illustré sur le figure 6.1.



FIGURE 6.1 – Illustration du phénomène de double réfraction au travers d'un cristal de calcite. © Wikipedia. Released to the public domain by Adrian Pingstone in May 2003.

Dans ce chapitre, nous allons décrire comment construire les rayons se propageant dans le milieu anisotrope. Cette construction s'appuie sur la surface des vitesses radiales. Elle peut être vue comme une extension de l'approche de Huygens développée pour la réfraction à l'interface entre deux milieux isotropes. Nous allons donc commencer par un bref rappel de cette approche de Huygens.

Il faut garder en mémoire que les deux rayons correspondant aux indices n' et n'' sont associés aux polarisations propres (pour un vecteur d'onde donné) définies au chapitre précédent. Il en découle que les deux rayons correspondent à deux polarisations linéaires et orthogonales distinctes.

6.1 Construction de Huygens pour les milieux isotropes

Cette construction repose sur le principe d'Huygens-Fresnel, selon lequel chaque point d'une surface d'onde peut être considéré comme une source émettant une ondelette. Ceci fait que si on connaît la surface d'onde à un instant donné t on peut la déterminer à un instant t' . En effet, la vibration émise à l'instant t se retrouve à un instant ultérieur $t' = t + \tau$ sur une surface qui est, à un facteur d'échelle près, la surface des vitesses radiales du milieu considéré.

Ce principe peut être notamment utilisé pour construire la surface d'onde réfractée à l'interface de deux milieux isotropes d'indices n_1 et n_2 , comme illustré sur la figure 6.2. De plus, un calcul de la longueur $l''I$ du schéma permet de retrouver la loi de Snell-Descartes qui établit une relation entre

- 6.1 Construction de Huygens pour les milieux isotropes 39
- 6.2 Construction des rayons réfractés dans un milieu anisotrope uniaxe 41
- 6.3 Orientation des vecteurs de l'onde dans le milieu anisotrope uniaxe 41

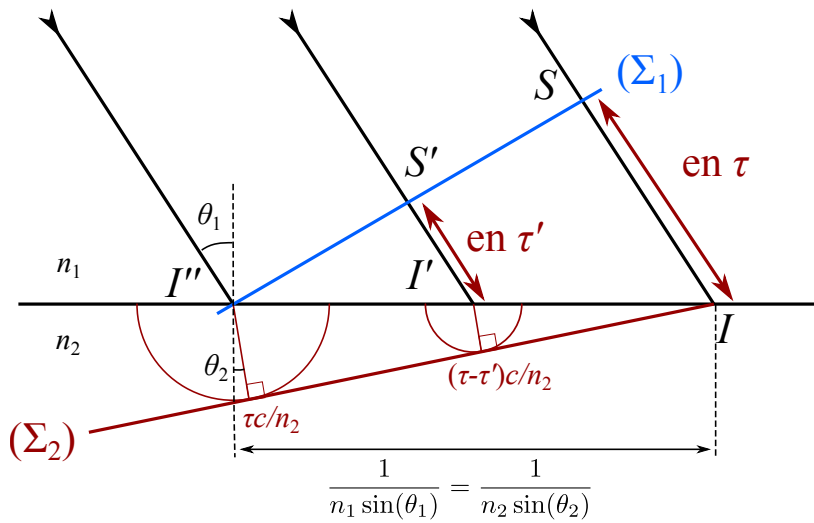


FIGURE 6.2 – Illustration du principe d’Huygens-Fresnel pour construire une surface d’onde réfractée à l’interface de deux milieux isotropes d’indices n_1 et n_2 . Suivant le principe d’Huygens-Fresnel, le point I'' émet à l’instant $t = 0$ une onde dans le second milieu. La vibration associée se retrouve à l’instant t sur une sphère de rayon $\tau c/n_2$. De même, entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$, l’état vibratoire du point S se retrouve au point I . Ce dernier point émet une onde dans le second milieu qui n’a pas le temps de se propager. Enfin, l’état du point S' se retrouve en I' au bout d’un temps τ' . Le point I' peut alors émettre une vibration qui se propage dans le second milieu pendant $\tau - \tau'$ et qui se retrouve sur la sphère de rayon $(\tau - \tau')c/n_2$. Le plan d’onde incident (Σ_1) génère donc dans le second milieu un plan d’onde (Σ_2) donné par l’enveloppe de toutes les ondelettes générées par les points de l’interface à des instants différents.

l’angle du rayon dans le milieu d’incidence θ_1 (par rapport à la normale à la surface) et celui dans le milieu de réfraction θ_2 ,

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2). \tag{6.1}$$

La construction de Huygens consiste alors à construire le plan d’onde réfracté en utilisant les surfaces de vitesses radiales des deux milieux isotropes, ou plus simplement les cercles de rayon $1/n_1$ et $1/n_2$. Dans le cas des milieux isotropes, la normale à ce plan donne le vecteur d’onde et donc la direction du rayon lumineux.

Comme le montre la figure 6.3, cette construction se fait en deux temps :

- On commence par tracer un cercle de rayon $1/n_1$, correspondant à la surface des vitesses du premier milieu isotrope. Puis on trace la tangente à ce cercle à partir du point d’intersection entre le rayon incident, qui fait un angle θ_1 avec la normale à l’interface, et le cercle. Cette tangente coupe l’interface en un point I .
- On part ensuite du point I pour tracer la tangente au cercle de rayon $1/n_2$ représentant la surface des vitesses radiales du second milieu. Le point de tangence à ce second cercle permet alors de tracer le rayon réfracté qui fait un angle θ_2 avec la normale à l’interface.

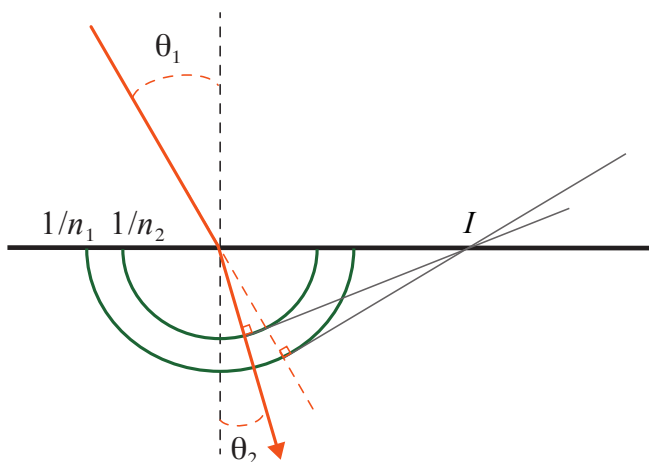


FIGURE 6.3 – Construction de Huygens du rayon réfracté à l’interface entre deux milieux isotropes d’indices $n_2 > n_1$.

6.2 Construction des rayons réfractés dans un milieu anisotrope uniaxe

L'idée est ici de prolonger le raisonnement effectué pour les milieux isotrope aux milieux anisotropes uniaxes.

Un milieu anisotrope uniaxe possède deux indices, un indice ordinaire n_o et un indice extraordinaire n_e . Nous allons donc simplement tracer trois surfaces de vitesses radiales, comme indiqué sur la figure 6.4 :

- la surface des vitesses du milieu isotrope $1/n_1$;
- la surface des vitesses correspondant à la polarisation ordinaire du milieu anisotrope $1/n_o$;
- la surface des vitesses correspondant à la polarisation extraordinaire du milieu anisotrope $1/n_{\text{eff}}$ (qui varie entre $1/n_o$ et $1/n_e$ d'un axe de l'ellipse à l'autre). Attention, cette fois-ci les raisonnements géométriques ne sont plus valables avec cette surface car la tangente à la surface d'une ellipse n'est plus normale à un « rayons ».

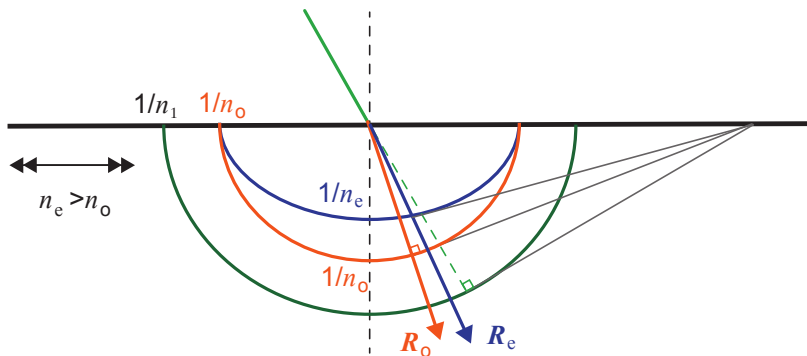


FIGURE 6.4 – Construction des rayons réfractés ordinaire et extraordinaire à l'interface d'un milieu isotrope avec un milieu anisotrope uniaxe.

On cherche le point d'intersection entre la tangente à la surface des vitesses radiales du milieu isotrope et l'interface. À partir de ce point, on trace ensuite les tangentes aux surfaces des vitesses radiales pour l'onde ordinaire et extraordinaire. Les points de tangence à chacune des surfaces donnent la direction des rayons réfractés ordinaire et extraordinaire respectivement.

6.3 Orientation des vecteurs de l'onde dans le milieu anisotrope uniaxe

Nous avons déjà vu que

- les vecteurs \mathbf{E}_o et \mathbf{D}_o du rayon ordinaire sont parallèles, et orthogonaux au rayon ordinaire \mathbf{R}_o (vecteur de Poynting) et à l'axe optique
- le vecteur \mathbf{E}_e du rayon extraordinaire perpendiculaire à \mathbf{E}_o et au rayon extraordinaire \mathbf{R}_e : il se trouve donc dans le plan de l'axe optique et du vecteur d'onde \mathbf{k}

Ici, nous ajoutons que le vecteur \mathbf{D}_e se trouve dans le plan tangent à la surfaces des vitesses extraordinaires (selon le principe d'Huygens-Fresnel rappelé précédemment ou la démonstration donnée ci-après). Avec ces informations, nous pouvons tracer les vecteurs comme sur la figure 6.5.

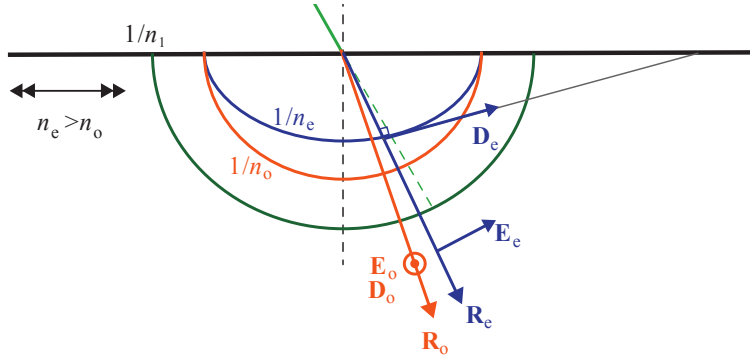


FIGURE 6.5 – Construction des différents vecteurs ordinaires et extraordinaires à l'interface d'un milieu isotrope avec un milieu anisotrope uniaxe.

Démonstration : \mathbf{D}_e tangent à la surface $1/n_e$.

Le principe d'Huygen-Fresnel, nous permet d'affirmer que le plan tangent à la surface des vitesses est le plan d'onde et donc qu'il contient \mathbf{D}_e .

Il est possible de retrouver ce résultat par un raisonnement géométrique. Pour cela, nous explicitons les coordonnées du vecteur de Poynting \mathbf{R}_e de l'onde extraordinaire, $\mathbf{R}_e = (\alpha_R, \beta_R, \gamma_R)$, et rappelons que la surface des vitesses extraordinaire s'écrit

$$n_e^2 x^2 + n_o^2 y^2 + n_o^2 z^2 = 1 \quad (6.2)$$

et la relation entre \mathbf{D}_e et \mathbf{E}_e s'exprime

$$\mathbf{D}_e = \epsilon_0 \begin{pmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{pmatrix} \mathbf{E}_e. \quad (6.3)$$

Un vecteur normal à la surface des vitesses extraordinaires dans la direction du vecteur \mathbf{R}_e peut donc s'écrire $\mathbf{N}_e = (n_e^2 \alpha_R, n_o^2 \beta_R, n_o^2 \gamma_R)$. Nous pouvons alors exprimer le produit scalaire

$$\mathbf{N}_e \cdot \mathbf{D}_e = \epsilon_0 n_o^2 n_e^2 (\alpha_R E_{e,x} + \beta_R E_{e,y} + \gamma_R E_{e,z}) = \epsilon_0 n_o^2 n_e^2 \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{E}_e = 0. \quad (6.4)$$

Nous avons donc $\mathbf{N}_e \perp \mathbf{D}_e$.

Effets physiques modifiant les indices d'un milieu biréfringent

7

Nous avons jusqu'à présent considéré une réponse linéaire de la polarisabilité du milieu avec le champ lumineux,

$$\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0[\chi(\omega)]\mathbf{E}_\omega = \epsilon_0[\chi^{(1)}(\omega)]\mathbf{E}_\omega. \quad (7.1)$$

Il existe différents phénomènes physiques qui conduisent à une réponse non-linéaire du milieu. Ces effets peuvent être caractérisés par une relation non-linéaire entre la polarisabilité du milieu et le champ électromagnétique, qui se met sous la forme :

Réponse non-linéaire d'un milieu

$$[\chi(\omega)] = [\chi^{(1)}(\omega)] + [\chi^{(2)}(\omega, \mathbf{E}_{\text{tot}})] + [\chi^{(3)}(\omega, \mathbf{E}_{\text{tot}}^2)] + [h^{(2)}(\omega, \mathbf{B}_{\text{tot}})] + \dots \quad (7.2)$$

Les champs \mathbf{E}_{tot} et \mathbf{B}_{tot} correspondent à la somme des champs créés par la lumière se propageant (\mathbf{E}_ω et \mathbf{B}_ω) et ceux de champs externes, notés dans la suite \mathbf{E}_{ext} et \mathbf{B}_{ext} , à savoir $\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_\omega + \mathbf{E}_{\text{ext}}$ par exemple.

Les trois termes présents dans l'équation ci-dessus représentent les non-linéarités les plus communément rencontrées, à savoir :

Effet Pockels - effet électro-optique linéaire

$$[\chi^{(2)}(\omega, \mathbf{E}_{\text{tot}})] \quad (7.3)$$

Effet Kerr - effet électro-optique quadratique

$$[\chi^{(3)}(\omega, \mathbf{E}_{\text{tot}}^2)] \quad (7.4)$$

Effet Faraday - effet magnéto-optique linéaire

$$[h^{(2)}(\omega, \mathbf{B}_{\text{tot}})] \quad (7.5)$$

Dans le cadre de ce cours, nous nous placerons (presque) toujours dans une situation où l'effet non-linéaire de la réponse du milieu est induit par les seuls champs externes. Cela revient à se placer dans une situation où l'amplitude des champs externes est bien plus grande que celle du champ lumineux,

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_{\text{ext}}| &\gg |\mathbf{E}_\omega|, \\ |\mathbf{B}_{\text{ext}}| &\gg |\mathbf{B}_\omega|. \end{aligned} \quad (7.6)$$

7.1 Effets photo-électriques . . . 45

7.2 Effet magnéto-optique . . . 46

Cela se traduit par le fait que la matrice de susceptibilité $[\chi(\omega)]$ s'exprime en fonction des seuls champs externes puisque $\mathbf{E}_{\text{tot}} \simeq \mathbf{E}_{\text{ext}}$ and $\mathbf{B}_{\text{tot}} \simeq \mathbf{B}_{\text{ext}}$. Il est important de bien comprendre que ce que nous décrivons est la **réponse non-linéaire du milieu anisotrope à des champs externes, alors que du point de vue du champ lumineux nous nous restreignons à la seule réponse linéaire**. Ainsi nous ne traiterons pas l'optique non-linéaire, situation dans laquelle la contribution du champ lumineux \mathbf{E}_ω à la susceptibilité ne peut pas être négligée[†]. L'optique non-linéaire fera l'objet d'un cours en deuxième année.

[†] Les termes de l'optique non-linéaire sont non-linéaires en \mathbf{E}_ω , par exemple un terme du type $\chi^{(2)}\mathbf{E}_\omega^2$

Nous allons décrire brièvement quelques conséquences des non-linéarités optiques lorsqu'elles sont pilotées par des champs externes. En particulier, nous allons discuter ces effets sur la surface des indices et les modifications de propriétés de polarisation associées. Ces possibilités sont au centre des composants actifs de polarisation : il est possible de contrôler les propriétés optiques d'un milieu biréfringent à l'aide de champs externes.

Pour établir les propriétés de polarisation des milieux, nous devons analyser les valeurs et vecteurs propres de l'équation aux valeurs propres Eq. (4.6),

$$\left(\frac{1}{n^2} - ([1] - [P_{\mathbf{u}}])[\epsilon_r(\omega)]^{-1} \right) \mathbf{D}_\omega = 0. \quad (7.7)$$

Les modifications de la polarisation du milieu issues des effets non-linéaires apparaissent dans le second terme de l'équation précédente, à travers la permittivité $[\epsilon_r(\omega)]^{-1}$. Ces modifications peuvent s'exprimer comme une faible variation autour de la solution en l'absence de non-linéarité,

$$\frac{1}{[\epsilon_r(\omega)]} = \frac{1}{[\epsilon_r(\omega)]_1} + \Delta \left(\frac{1}{[\epsilon_r(\omega)]} \right). \quad (7.8)$$

Il en découle que nous allons écrire les modifications apportées par les effets non-linéaires sus-mentionnés sous la forme

Modification de l'indice induit par les effets électro-optiques

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_1^2} + \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right), \quad (7.9)$$

où n_1 correspond à l'indice de réfraction linéaire, en l'absence d'effets non-linéaires.

Il est important de souligner ici que les effets non-linéaires que nous discutons impliquent de très faibles variations de l'indice, à savoir $\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right) \ll \frac{1}{n_1^2}$. Mais ces très faibles variations de l'indice peuvent conduire à un effet drastique sur les propriétés de polarisation de la lumière lorsqu'elle se propage dans un tel milieu non-linéaire : en effet, une variation d'indice δn sur une longueur e du milieu induit un déphasage $(2\pi e / \lambda) \delta n$ qui est de l'ordre de π dès lors que $\delta n \sim \lambda / 2e$!

7.1 Effets photo-électriques

Effet Pockels

L'effet Pockels décrit la variation linéaire de la permittivité d'un milieu sous l'influence d'un champ électrique. Nous considérons ici que la susceptibilité varie linéairement avec un champ externe $\mathbf{E}_{\text{ext}} = (E_x^{\text{ext}}, E_y^{\text{ext}}, E_z^{\text{ext}})$. Il est commun d'introduire un tenseur $[r]$, appelé tenseur électro-optique linéaire, pour décrire cette variation. Chaque élément (i, j) de la matrice de variation $\Delta(1/[\epsilon_r(\omega)])$ s'exprime alors

$$\Delta\left(\frac{1}{[\epsilon_r(\omega)]}\right)_{i,j} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k r_{ijk} E_k^{\text{ext}}, \quad (7.10)$$

et de façon équivalente,

$$\Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{i,j} = \sum_k r_{ijk} E_k^{\text{ext}}. \quad (7.11)$$

Le tenseur électro-optique linéaire est en général une matrice 3x3x3 (soit 27 éléments) mais les propriétés de symétrie permettent de montrer que seuls 18 éléments sont indépendants. C'est l'origine de l'écriture de ce tenseur sous la forme d'une matrice 3x6 qu'il est pratique d'utiliser pour décrire les modifications de l'ellipsoïde des indices induites par le champ électrique.

Rappelons qu'en l'absence de champ électrique, l'ellipsoïde des indices s'écrit simplement $x^2/n_x^2 + y^2/n_y^2 + z^2/n_z^2 = 1$. En présence d'effet Pockels, l'ellipsoïde des indices peut être écrite sous la forme

$$\frac{x^2}{n_{xx}^2} + \frac{y^2}{n_{yy}^2} + \frac{z^2}{n_{zz}^2} + \frac{2yz}{n_{yz}^2} + \frac{2xz}{n_{xz}^2} + \frac{2xy}{n_{xy}^2} = 1, \quad (7.12)$$

qui fait intervenir 6 nouveaux indices dont les variations (par rapport à la situation sans effet non-linéaire[†]) sont donnés par le tenseur $[r]$ de taille 3x6 :

$$\begin{bmatrix} \Delta\left(\frac{1}{n_{xx}^2}\right) \\ \Delta\left(\frac{1}{n_{yy}^2}\right) \\ \Delta\left(\frac{1}{n_{zz}^2}\right) \\ \Delta\left(\frac{1}{n_{yz}^2}\right) \\ \Delta\left(\frac{1}{n_{xz}^2}\right) \\ \Delta\left(\frac{1}{n_{xy}^2}\right) \end{bmatrix} = [r] \cdot \mathbf{E}_{\text{ext}}. \quad (7.13)$$

[†] En l'absence d'effet non-linéaire, $n_{xx} = n_x$, $n_{yy} = n_y$, $n_{zz} = n_z$ et $n_{xy} = n_{xz} = n_{yz} = 0$.

De plus, les symétries de certains matériaux conduisent à une simplification de ce tenseur, dont de nombreux éléments sont alors nuls. Par exemple, dans le cas célèbre d'un cristal de KDP, le tenseur électro-optique

linéaire s'écrit simplement sous la forme

$$[r] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ r_{41} & 0 & 0 \\ 0 & r_{41} & 0 \\ 0 & 0 & r_{63} \end{bmatrix}. \quad (7.14)$$

Comme discuté dans un travail dirigé, lorsque le champ est appliqué selon l'axe Oz ($\mathbf{E}_{\text{ext}} = E_0 \mathbf{E}_z$) l'ellipsoïde des indices devient

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} + 2xy r_{63} E_0 = 1, \quad (7.15)$$

et correspond à une rotation des axes propres du cristal de 45° dans le plan xOy , correspondant à l'ellipsoïde

$$\frac{X^2}{n_X^2} + \frac{Y^2}{n_Y^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1. \quad (7.16)$$

La variation des indices dans les nouvelles directions propres OX et OY s'écrit alors

$$\frac{1}{n_X^2} = \frac{1}{n_o^2} + r_{63} E_0 \quad \frac{1}{n_Y^2} = \frac{1}{n_o^2} - r_{63} E_0. \quad (7.17)$$

Effet Kerr

Une approche similaire peut être conduite pour décrire l'effet Kerr qui correspond à la variation quadratique de la permittivité d'un milieu sous l'influence d'un champ électrique \mathbf{E}_{ext} . On introduit alors un tenseur de rang 4, le tenseur électro-optique quadratique $[R]$, pour décrire les variations de la permittivité avec le carré du champ électrique,

$$\Delta \left(\frac{1}{[\epsilon_r(\omega)]} \right)_{i,j} = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_{i,j} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k R_{ijkl} E_k^{\text{ext}} E_l^{\text{ext}}. \quad (7.18)$$

Une description détaillée de l'effet Kerr selon cette approche va au-delà de notre cours.

7.2 Effet magnéto-optique

Effet Faraday

Jusqu'à présent nous avons discuté la polarisation d'un milieu induite par un champ électrique (réponse linéaire – effet Pockels et effet Kerr). Le mouvement des charges électriques dans le milieu (qui sont à l'origine de la polarisation de ce dernier) peuvent également être affectées par un champ magnétique extérieur. En présence d'un tel champ magnétique externe, on s'attend donc à ce que la polarisation du milieu soit modifiée.

Le cas d'une réponse linéaire de la polarisation (ou susceptibilité) avec le champ magnétique est celui de l'effet Faraday indiqué en début de ce chapitre.

La variation de la matrice de permittivité associée à l'effet Faraday ne contient que des termes non-diagonaux imaginaires et s'écrit

$$\Delta[\epsilon_r(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & ig_{1,2} & ig_{1,3} \\ -ig_{1,2} & 0 & ig_{2,3} \\ -ig_{1,3} & -ig_{2,3} & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Il est possible de se faire une intuition simple de cette propriété en revenant à l'origine microscopique de cet effet. En présence d'un champ magnétique externe \mathbf{B}_{ext} (différent du champ magnétique associé à l'onde lumineuse \mathbf{B}_ω), une charge du milieu est soumise à une force de Lorentz proportionnelle à $\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{ext}} \sim \partial \mathbf{R} / \partial t \times \mathbf{B}_{\text{ext}}^*$. Le mouvement de la charge étant induit par le champ électrique de l'onde lumineuse se propageant, en première approximation nous avons $\mathbf{R} \propto \mathbf{E}_\omega$ (réponse d'un dipôle électrique classique au champ exciteur \mathbf{E}_ω). L'effet du champ magnétique sur les charges du milieu peut alors s'exprimer comme $\partial \mathbf{E}_\omega / \partial t \times \mathbf{B}_{\text{ext}} \sim i\omega \mathbf{E}_\omega \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$: les termes décrivant cette interaction avec le champ \mathbf{B}_{ext} sont donc imaginaires et non-diagonaux car orthogonaux au champ \mathbf{E}_ω .

*Le champ magnétique total s'écrit $\mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_\omega$ et nous négligeons l'effet du champ induit par la lumière qui est, dans la très grande majorité des situations, complètement négligeable devant le champ externe.

Dans le cas le plus simple qui nous intéresse, les symmétries du milieu et son orientation sont telles que pour une onde lumineuse se propageant selon la direction Oz nous avons

$$\Delta[\epsilon_r(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & ig_{1,2} & 0 \\ -ig_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.20)$$

Les polarisations propres d'une telle matrice de permittivité,

$$[\epsilon_r(\omega)] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & ig_{1,2} & 0 \\ -ig_{1,2} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

sont les polarisations circulaires droites et gauches dans le plan d'onde xOy perpendiculaire au vecteur d'onde orienté selon Oz . Cette situation est celle que nous avons rencontré lors de la discussion des isolateurs de Faraday, qui permettent de réaliser une diode optique.