Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 1 bis : Intégrale de Riemann (révisions)

Dans cette feuille, étant donnés $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, on note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale (de Riemann) de f entre a et b. Si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ désigne une primitive de f (c'est-à-dire une fonction de dérivée $F' = f$), on rappelle qu'on a l'égalité $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. Notamment, lorsque $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1, on a l'égalité $\int_a^b (u'v + uv')(t)\mathrm{d}t = (uv)(b) - (uv)(a)$ (intégration par parties).

Exercice 1. (Propriétés de base des intégrales). Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ? Si vous répondez faux essayez, lorsque c'est possible, de réparer l'énoncé pour qu'il devienne correct (en rajoutant une hypothèse par exemple).

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\int_0^b f(t)dt \geq 0$ pour tout $b \in [0, 1]$ alors $f \geq 0$.
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est croissante, alors f est positive.
3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f \leq 1$ alors $\int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt$.
4. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction positive telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Exercice 2. (Révisions de méthodes de calcul d'intégrales).

1. Calculer les intégrales suivantes
   (a) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx$ (à l'aide d'une primitive) ;
   (b) $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ (à l'aide d'un changement de variables) ;
   (c) $\int_0^\pi x \sin(x)\, dx$ (à l'aide d'une intégration par parties) ;
   (d) $\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}\, dx$ (à l'aide d'une décomposition en éléments simples).
2. Déterminer une primitive des fonctions réelles suivantes :

   (a) $x \mapsto xe^x$; (b) $x \mapsto x\cos(x^2)$; (c) $x \mapsto \ln(1 + x^2)$.

Exercice 3. (Limite d'une série). Soit $x \in [0; 1[$ fixé.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1 - x) - \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt.$$
2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1 - t} dt = 0.$$
3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$.

Exercice 4. (Suites d'intégrales).

1. Soient $a < b$. Soit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En utilisant la linéarité et l'inégalité triangulaire pour de l'intégrale de Riemann, montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales $I_n = \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$ converge, et identifier sa limite.
2. Pour $n > 0$, on définit $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n} + x$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^\pi f_n(x)\,dx$. (On pourra se rappeler que $\sin^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ pour tout réel θ. Comment montre-t-on cette formule ?).
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction que l'on précisera.
   (c) Est-il vrai que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f_n(x)dx = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx?$$
   On pourra répondre à cette question de deux façons : à l'aide du calcul que l'on vient de mener, et en utilisant un résultat général d'interversion limite-intégrale.
3. On considère maintenant la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par
   $$g_n : x \mapsto (n+1)(n+2)x^n(1-x).$$
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 g_n(x)\,dx$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on précisera.
   (c) Est-il vrai que
   $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(x)dx\,?$$
4. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\frac{1}{n}$ sur $[0,n]$ et 0 en dehors.
   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction identiquement nulle ;
   (b) Montrer que dans ce cas nous ne pouvons pas échanger limite et intégrale.

Exercice 5. (Une intégrale à paramètre). Soit $f : [0,1] \to [0,\infty[$ une fonction continue. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 \sqrt{f(t) + x^2}dt.$$

1. Montrer que la racine carrée est sous-additive sur son domaine de définition : pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$
   $$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b},$$
   et en déduire que pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$
   $$\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}.$$
2. Montrer que g est continue (sans utiliser de théorème sur la régularité des intégrales à paramètres).
3. Montrer que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (sans utiliser de théorème de permutation limite intégrale).

EXERCICES BONUS

Exercice 6. (Fonctions continues par morceaux et intégrales.) Rappelons les définitions suivantes.

1. Une *subdivision* $\sigma = (s_0, \ldots, s_k)$ $(k \geq 1)$ du segment $[a, b]$ est une famille finie de points de $[a, b]$ contenant les extrémités et rangés par ordre croissant, soit
$$s_0 = a < s_1 < \cdots < s_{k-1} < s_k = b\,.$$
2. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie sur un segment est *continue par morceaux* s'il existe une subdivision $\sigma = (s_0, \ldots, s_k)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]s_j, s_{j+1}[$ de la subdivision soit continue et ait une limite finie aux bornes de cet intervalle.

Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre exemple) ? Si vous répondez faux essayez, lorsque c'est possible, de réparer l'énoncé pour qu'il devienne correct (en rajoutant une hypothèse par exemple).

1. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Si $\int_0^1 f(t)dt = 0$ alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 0$.
2. Une limite simple de fonctions continues par morceaux est continue par morceaux.
3. Une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux est bornée.

Exercice 7. (Calcul d'une suite d'intégrales). Soit la suite de fonctions continues définie sur le segment $[0, \pi/2]$ par $f_n(t) = (\sin(t))^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. On note
$$W_n = \int_0^{\pi/2} f_n(t)dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.
3. Soit $n \geq 2$. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer W_n en fonction de W_{n-2}. En déduire une expression de W_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra distinguer les cas selon la parité de n).

Exercice 8. (Une limite d'intégrales). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par
$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on explicitera.
2. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que l'on a convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur l'intervalle $[\alpha, 1]$. Le résultat reste-t-il vrai pour $\alpha = 0$?
3. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1]$, la quantité $|f_n(x) - f(x)|$ est bornée indépendamment de n et de x.
4. En déduire que la suite d'intégrales $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on déterminera. On pourra choisir $0 < \alpha < 1$ suffisamment proche de 0, estimer séparément $\int_0^\alpha f_n(t)dt$ et utiliser la relation de Chasles et les questions précédentes.