Feuille 1
Exercice 9

Discuter suivant la valeur du paramètre réel α la nature de la série de terme général
$$u_n = \exp\left(-(\ln(n))^\alpha\right), \; n \geq 2$$

On peut écrire
$$u_n = \frac{1}{\exp\left((\ln(n))^\alpha\right)}$$

et faire trois remarques préliminaires faciles :

1) Si $\alpha = 0$ $\ln(n)^\alpha = 1$ et $u_n = \frac{1}{e}$

La série $\sum u_n$ diverge (son terme général ne tend pas vers 0)

2) De même, si $\alpha < 0$ $\ln(n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$u_n \longrightarrow \frac{1}{\exp(0)} = 1$: la série $\sum u_n$ diverge.

3) On peut remarquer aussi que si $\alpha = 1$

$u_n = \frac{1}{\exp(\ln(n))} = \frac{1}{n}$ et $\sum u_n$ diverge.

- On va profiter de ce résultat pour montrer que

$$\boxed{\text{Si } \alpha \leq 1 \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge}}$$

Remarquons d'abord que si $\alpha \leq 1$ et $u \in]1, +\infty[$ alors

$$u^{\alpha} \leq u \qquad (1)$$

En effet, $u^{\alpha} = \exp(\alpha \ln u)$, comme $\alpha \leq 1$

alors $\alpha \ln u \leq \ln u$ (on a multiplié l'inégalité $\alpha \leq 1$ par le réel > 0 $\ln u$)

et $\exp(\alpha \ln u) \leq \exp(\ln u)$

En particulier, si $n \geq 3$, $\ln(n) > 1$ et $u = \ln(n)$ dans (1) devient

$$\left(\ln(n)\right)^{\alpha} \leq \ln(n) \qquad (2)$$

si $n \geq 3$ et $\alpha \leq 1$

Par conséquent $\exp\left(\left(\ln(n)\right)^{\alpha}\right) \leq \exp(\ln(n)) = n$

et $u_n \geq \dfrac{1}{n} > 0 \quad (n \geq 3, \alpha \leq 1)$

Par le critère de comparaison, la série $\sum u_n$ diverge.

- Montrons enfin que

$$\boxed{\text{Si } \alpha > 1 \text{ la série } \sum u_n \text{ converge}}$$

On considère

$$n^2 u_n = \frac{n^2}{\exp((\ln(n))^\alpha)} = \frac{\exp(2\ln(n))}{\exp((\ln(n))^\alpha)}$$

$$= \exp\left(2\ln(n) - (\ln(n))^\alpha\right)$$

$$= \exp\left[(\ln(n))^\alpha\left(2(\ln(n))^{1-\alpha} - 1\right)\right]$$

Comme $1-\alpha < 0$, $(\ln(n))^{1-\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$2(\ln(n))^{1-\alpha} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, enfin

$(\ln(n))^\alpha\left(2(\ln(n))^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

(car $(\ln(n))^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) et

$$n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, à partir d'un certain rang on aura $n^2 u_n < 1$ et

$0 < u_n < \frac{1}{n^2}$. Grâce au critère de comparaison, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Conclusion : $\sum u_n$ diverge si $\alpha \leq 1$

$\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$