Feuille 1

Deux cas de l'Exercice 8

- Etudier la convergence de la série de terme général
$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/3} - \left(\frac{n}{n+a}\right)^{1/2}$$
(ici a est un réel > 0)

Nous allons utiliser le DL en 0

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)} \quad (1)$$

- D'une part $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{3}} =$
$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{3}} \underset{\substack{\uparrow \\ (1)\ \alpha=-\frac{1}{3}}}{=} 1 - \frac{1}{3}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$\boxed{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3n} + \frac{2}{9n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (2)$$

- D'autre part $\left(\frac{n}{n+a}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} =$
$$= \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ (1)\ \alpha=-\frac{1}{2}}}{=} 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$
et
$$\boxed{\left(\frac{n}{n+a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{a}{2n} + \frac{3a^2}{8n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (2)$$

A partir de (1) et (2) on obtient

$$\boxed{u_n = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{9} - \frac{3a^2}{8}\right)\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}$$

→ Si $a \neq \frac{2}{3}$ $\left(\Leftrightarrow \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \neq 0\right)$, alors

$$u_n \sim \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n} \quad \text{(signe constant)}$$

et $\sum u_n$ diverge, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

→ Si $a = \frac{2}{3}$, le premier terme du DL s'annule et

$$u_n = \left(\frac{2}{9} - \frac{3}{8}\,\frac{4}{9}\right)\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

et par conséquent

$$u_n \sim \frac{1}{12n^2} \quad \text{(signe constant)}, \text{ ainsi}$$

$\sum u_n$ converge car $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

• Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = 1 - n\ln\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)$$

Remarquons que $u_n = 1 - n\left[\ln(2n+1) - \ln(2n-1)\right]$

$= 1 - n\left[\ln\left(2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right)\right]$ d'où

$$\boxed{u_n = 1 - n\left[\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]} \quad (1)$$

Utilisons le DL en 0

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$$

pour écrire

$$\boxed{\begin{aligned} \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{24n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \\ \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) &= -\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{24n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}} \quad (2)$$

A partir de (1) et (2) on a

$$u_n = -n\left[\frac{1}{12n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right] \qquad \text{et}$$

$$u_n \sim -\frac{1}{12n^2} \qquad (\text{signe constant})$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, le critère d'équivalence nous dit que $\sum u_n$ converge.