Partiel du 28 Octobre 2024

Relativité Restreinte

<u>Notations et Rappels</u>.

A tout référentiel $\mathcal{R}$, on associe un point origine O et un système de coordonnées cartésiennes tel que tout événement est repéré par ses coordonnées (t, x, y, z). On notera $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base de vecteurs spatiaux associée à ce système.

Sauf contre-indication, on considèrera des transformations de Lorentz entre deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre dans la direction $\vec{e}_x$: on notera en particulier $\vec{V} = V\vec{e}_x$ la vitesse de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$. Par ailleurs, on supposera que les deux origines O et O' sont confondues en $t = t' = 0$. Dans ce cas, on rappelle que les transformations de Lorentz entre les coordonnées (t, x, y, z) et (t', x', y', z') d'un même événement dans les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont données par

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)\,, \quad x' = \gamma(x - \beta ct)\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,, \tag{1}$$

avec les notations usuelles

$$\beta = \frac{V}{c}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{2}$$

Dans tout le sujet, on notera c la vitesse de la lumière dans le vide.

<u>Indication</u>.

Les trois exercices sont indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre quelconque. Certaines questions sont indépendantes les unes des autres.

1. Le photon en Relativité Restreinte

On étudie le mouvement d'une particule relativiste dans un référentiel $\mathcal{R}$. Pour simplifier l'étude, on suppose que son mouvement a lieu dans le plan engendré par la base de vecteurs $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Ainsi, sa position dans l'espace-temps de Minkowski est entièrement définie par le quadri-vecteur position (ct, x, y) (qui se réduit ici à un vecteur de dimension 3 car $z = 0$).

a) Transformation des vitesses et photons

1. Déterminer les lois de transformation des composantes de la vitesse de la particule lors du passage du référentiel $\mathcal{R}$ (où la vitesse est notée $\vec{u}$) au référentiel $\mathcal{R}'$ (où la vitesse est notée $\vec{u}\,'$) et montrer que:

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2}\,, \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)}\,. \tag{3}$$

2. Montrer que, si la particule est un photon et se déplace à la vitesse de la lumière c dans $\mathcal{R}$, alors sa vitesse est également de norme c dans $\mathcal{R}'$.

3. On suppose toujours que la particule est un photon et qu'il est émis dans une direction θ' par rapport à $\vec{e}_x$ du point de vue de $\mathcal{R}'$. Sa direction de propagation forme un angle θ avec la direction $\vec{e}_x$ du point de vue de $\mathcal{R}$. En déduire les relations d'aberration optique:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\,, \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}\,. \tag{4}$$

b) Propriétés d'une source lumineuse en mouvement

Une source d'ondes électromagnétiques est immobile dans $\mathcal{R}'$ et se trouve à l'origine du repère associé à $\mathcal{R}'$. Pour étudier cette source, il est commode d'introduire un système de coordonnées sphériques dans lequel tout point M est repéré par (r', θ', φ') dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Ainsi, tout vecteur unitaire $\vec{n}$ est entièrement caractérisé par les angles (θ', φ') dans ce système de coordonnées, comme illustré sur la figure 1.

Le rayonnement de la source est isotrope et stationnaire dans $\mathcal{R}'$, ce qui signifie que le nombre de photons dN émis par unité d'angle solide (et par unité de temps) autour de la direction $\vec{n}$ est donné par:

$$dN = \frac{N_0}{4\pi} d\Omega' , \qquad d\Omega' = \sin\theta' d\theta' d\varphi' , \tag{5}$$

avec N_0 qui est une constante.

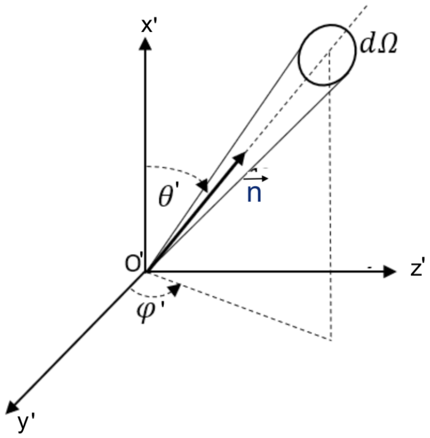

Figure 1: Illustration de l'angle solide dans le référentiel de la source $\mathcal{R}'$. Noter que l'axe $\vec{e}_x$ est vertical dans ce schéma et que l'angle θ' est celui formé entre les directions $\vec{e}_x$ et $\vec{n}$. La source se trouve en O' et dN est le nombre de photons émis par unité de temps dans le cône centré autour de la direction $\vec{n}$ représenté sur la figure.

1. Expliquer pourquoi l'angle φ est invariant lors du passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$, i.e. $\varphi' = \varphi$.

2. En utilisant les résultats (4) de la question précédente, montrer que, du point de vue d'un observateur dans $\mathcal{R}$, la source n'est plus isotrope et que le nombre de photons dN émis par unité d'angle solide est maintenant donné par la formule:

$$dN = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} \, d\Omega, \qquad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, . \tag{6}$$

   On pourra éventuellement utiliser la relation différentielle: $\sin\theta' d\theta' = -d(\cos\theta')$.

3. Vérifier que le nombre total de photons émis par la source dans toutes les directions est bien le même dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$.

4. A partir de maintenant, on se placera toujours dans le référentiel $\mathcal{R}$. Calculer le nombre de photons $N(\theta_0)$ émis depuis la source dans un cône d'axe (de révolution) $\vec{e}_x$ et de demi-angle au sommet θ_0. Montrer qu'il est donné par l'expression:

$$N(\theta_0) = N_0 \frac{1+\beta}{2} \frac{1-\cos\theta_0}{1-\beta\cos\theta_0} \, . \tag{7}$$

5. En déduire que la valeur de l'angle θ_0 tel que la moitié des photons émis par la source le sont dans le cône de demi-angle au sommet θ_0 est obtenu à partir de la relation

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{\gamma}\,. \tag{8}$$

6. Où se concentre le rayonnement émis par la source du point de vue d'un observateur dans $\mathcal{R}$? Que se passe-t-il dans le cas limite où la source se déplace à une vitesse V qui tend vers la vitesse de lumière c?

2. Une histoire de train et de miroir

Un train avance à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ par rapport à la gare. Un passager du train envoie, vers l'arrière (i.e. dans le sens de $-\vec{e}_x$), un signal lumineux qui se réfléchit sur un miroir fixe par rapport à la gare. Ce signal revient ensuite à l'observateur.

On appelle $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ les référentiels de la gare et du train respectivement. Le miroir se trouve à $x = 0$ dans $\mathcal{R}$ et le passager à $x' = 0$ dans $\mathcal{R}'$. Par ailleurs, à $t = t' = 0$, le passager et le miroir coïncident, i.e. $x = x' = 0$. Enfin, le passager envoie son signal à l'instant t_e par rapport à $\mathcal{R}$.

Dans toutes les questions de l'exercice, on donnera les expressions demandées en fonction de t_e, β et γ.

1. Montrer que le passager se trouve à la position $x_e = \beta c t_e$ (par rapport à $\mathcal{R}$) au moment de l'émission du signal.

2. En déduire les coordonnées de cet événement (ct'_e, x'_e) dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

3. Déterminer les coordonnées de l'événement (ct_m, x_m) qui correspond à la réflexion du signal sur le miroir dans $\mathcal{R}$. Pour cela, il pourra s'avérer intéressant de considérer la durée de parcours du signal lumineux lorsqu'il se propage de la position x_e à la position x_m dans $\mathcal{R}$.

4. En déduire les coordonnées (ct'_m, x'_m) du même événement dans $\mathcal{R}'$ en utilisant les transformations de Lorentz.

5. Déterminer enfin les coordonnées de l'événement qui correspond à la réception du signal réfléchi par le passager d'abord dans le référentiel $\mathcal{R}'$, puis dans $\mathcal{R}$. On notera (ct'_r, x'_r) et (ct_r, x_r) ces coordonnées respectives.

6. Comparer alors les durées des trajets aller, retour et aller-retour du signal lumineux dans les deux référentiels. Dans quel(s) cas retrouve-t-on la formule "classique" de dilatation des durées? Commenter le résultat.

3. Equation de propagation et Relativité

Dans le référentiel $\mathcal{R}$, associé au système de coordonnées (t, x, y, z), un observateur étudie un phénomène de propagation. Il montre que le signal $s(t, x)$, qui se propage dans la direction $\vec{e}_x$, satisfait une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - u^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0\,, \tag{9}$$

où u est une vitesse supposée constante. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que s est une fonction scalaire, i.e. elle est invariante sous les transformations de Lorentz.

A partir de $s(t,x)$, on définit le vecteur $\tilde{S}$ (qui est ici de dimension 2) dont les coordonnées sont définies à partir des dérivées partielles de s comme suit,

$$\tilde{S} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial s}{\partial x} \right) . \tag{10}$$

L'analogue du vecteur $\tilde{S}$ dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est noté $\tilde{S}'$ et a pour coordonnées

$$\tilde{S}' = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial s}{\partial t'}, \frac{\partial s}{\partial x'} \right) . \tag{11}$$

1. Calculer les coordonnées de $\tilde{S}'$ en fonction de celles de $\tilde{S}$. En déduire que $\tilde{S}'$ est obtenu par une transformation de Lorentz de $\tilde{S}$.

2. Pour simplifier, on suppose que u est une constante et ne varie pas d'un référentiel à l'autre. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'équation de propagation (9) soit invariante sous les transformations de Lorentz, i.e. pour qu'elle s'écrive sous la même forme,

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t'^2} - u^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x'^2} = 0 \, , \tag{12}$$

dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

3. Commenter ce résultat.

4. On suppose maintenant que la vitesse u n'est pas invariante et qu'elle se transforme lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre selon les lois (3) rappelées dans l'exercice 1. Montrer alors que l'équation de propagation est invariante si et seulement si $u = \pm c$.