① Partiel 2024 - Corrigé

$\boxed{\text{Ex. 1}}$ Photon en relativité restreinte

a) 1. • $u'_x = \dfrac{dx'}{dt'} = c\,\dfrac{\gamma(dx - \beta c\, dt)}{\gamma(c\,dt - \beta\, dx)} = c\,\dfrac{u_x - V}{1 - \frac{V u_x}{c^2}}$

avec $u_x = \dfrac{dx}{dt}$.

• $u'_y = \dfrac{dy'}{dt'} = c\,\dfrac{dy}{\gamma(c\,dt - \beta\, dx)} = \dfrac{u_y}{1 - \frac{V u_y}{c^2}}$; $u_y = \dfrac{dy}{dt}$

2. On suppose que $u_x^2 + u_y^2 = c^2$

alors $u_x'^2 + u_y'^2 = \dfrac{\gamma^2 (u_x - V)^2 + u_y^2}{\gamma^2 (1 - V u_x / c^2)^2}$

$= c^4 \dfrac{(u_x - V)^2 + (1-\beta^2) u_y^2}{(c^2 - V u_x)^2} = c^4 \dfrac{c^2 - 2 V u_x + V^2 - \beta^2 u_y^2}{(c^2 - V u_x)^2}$

$= c^4 \dfrac{c^2 - 2V u_x + V^2 - \beta^2 (c^2 - u_x^2)}{(c^2 - V u_x)^2}$

$= c^2 \dfrac{c^4 - 2 V c^2 u_x + V^2 u_x^2}{(c^2 - V u_x)^2} = c^2.$

$\Rightarrow u_x'^2 + u_y'^2 = c^2.$

3. $c \cos\theta' = \dfrac{c\cos\theta - V}{1 - \beta\cos\theta}$ et $c \sin\theta' = \dfrac{c\sin\theta}{\gamma(1 - \beta\cos\theta)}$

d'où les formules données.

b) 1. l'angle φ est défini dans le plan orthogonal à $\vec{V}$.

2. $dN = \dfrac{N_0}{4\pi} \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'$

avec $\sin\theta' d\theta' = -d(\cos\theta') = -d\left(\dfrac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}\right)$

$= \left\{ \dfrac{\sin\theta}{1 - \beta\cos\theta} + \beta\, \dfrac{(+)\sin\theta\,(\cos\theta - \beta)}{(1 - \beta\cos\theta)^2} \right\} d\theta$

$= \left\{ \dfrac{\sin\theta(1 - \beta\cos\theta) + \beta \sin\theta(\cos\theta - \beta)}{(1 - \beta\cos\theta)^2} \right\} d\theta$

②

$$\Rightarrow \sin\theta' \, d\theta' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} \sin\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow dN = \frac{N_0}{4\pi} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\theta)^2} d\Omega \quad \text{car } d\varphi' = d\varphi$$

3. • ds $\mathcal{R}'$: $N = \frac{N_0}{4\pi} \iint d\Omega' = N_0$

• ds $\mathcal{R}$: $N = \frac{N_0}{4\pi}(1-\beta^2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}$

$$\Rightarrow N = \frac{N_0}{4\pi}(1-\beta^2) \times 2\pi \times \int_0^{\pi} \frac{-d(\cos\theta)}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{N_0}{2}(1-\beta^2) \int_0^{\pi} d\left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)$$

$$= \frac{N_0}{2}(1-\beta^2) \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1+\beta}\right) = N_0 .$$

4. On calcule $N(\theta_0)$ avec une intégrale similaire :

$$N(\theta_0) = \frac{N_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} d\theta \frac{\sin\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}(1-\beta^2)$$

$$\Rightarrow N(\theta_0) = \frac{N_0}{2}(1-\beta^2) \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{1-\beta} - \frac{1}{1-\beta\cos\theta_0}\right)$$

$$= \frac{N_0}{2}(1+\beta) \frac{1-\cos\theta_0}{1-\beta\cos\theta_0}$$

5. On cherche θ_0 t.q. $N(\theta_0) = \frac{N_0}{2}$

$$\Leftrightarrow 1-\beta\cos\theta_0 = (1+\beta)(1-\cos\theta_0) = 1-\cos\theta_0+\beta-\beta\cos\theta_0$$

$$\Leftrightarrow \cos\theta_0 = \beta \Rightarrow \sin\theta_0 = \sqrt{1-\beta^2} = \frac{1}{\gamma} .$$

(3) 6. le rayonnement se concentre en avant de la source. La source est d'autant plus directive ds $\mathcal{R}$ que v s'approche de c. En effet $v \to c \Rightarrow \gamma \to \infty$

$\Rightarrow \theta_0 \to 0$.

C'est le rayonnement synchrotron.

$\boxed{\text{Ex. 2}}$ Histoire de train et miroir

1. $x_e = v t_e = \beta c t_e$

2. $\begin{cases} ct'_e = \gamma(ct_e - \beta x_e) = \frac{1}{\gamma} ct_e \\ x'_e = \gamma(x_e - \beta c t_e) = 0 \end{cases}$

3. Dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} ct_m = ct_e + \frac{x_e}{c} c = ct_e (1+\beta) \\ x_m = 0 \end{cases}$

Dans $\mathcal{R}'$: $\begin{cases} ct'_m = \gamma\, ct_e(1+\beta) - 0 \\ x'_m = -\gamma \beta c t_m = -\gamma\beta(1+\beta) ct_e \end{cases}$

4. Dans $\mathcal{R}'$: $\begin{cases} ct'_r = ct'_m + \gamma\beta(1+\beta) ct_e = \gamma(1+\beta)^2 ct_e \\ x'_r = 0 \end{cases}$

Dans $\mathcal{R}$: $\begin{cases} ct_r = \gamma^2(1+\beta)^2 ct_e = \frac{1+\beta}{1-\beta} ct_e \\ x_r = \gamma\beta c t'_r = \frac{1+\beta}{1-\beta} \beta\, ct_e \end{cases}$

5. Trajet aller :

- dans $\mathcal{R}$: $\Delta t_{aller} = t_m - t_e = \beta t_e$
- dans $\mathcal{R}'$: $\Delta t'_{aller} = t'_m - t'_e = \gamma\left(1+\beta - \frac{1}{\gamma^2}\right)t_e = \gamma\beta(1+\beta) t_e$

Trajet retour :

- dans $\mathcal{R}$: $\Delta t_{retour} = t_r - t_m = \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta} t_e$
- dans $\mathcal{R}'$: $\Delta t'_{retour} = \gamma\beta(1+\beta) t_e$

$\Rightarrow \quad \Delta t_{ar} = \gamma \Delta t'_{ar} = \frac{2\beta}{1-\beta} t_e$: c'est ici que l'on retrouve la fameuse formule car les événements ont lieu à la même position ds $\mathcal{R}'$!

4

Ex. 3 Equation de propagation et Relativité

1. $$\frac{\partial s}{\partial t'} = \frac{\partial s}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t'}$$

or $\begin{cases} ct = \gamma(ct' + \beta x') \\ x = \gamma(x' + \beta ct') \end{cases}$ $\Rightarrow \dfrac{\partial s}{\partial t'} = \gamma\dfrac{\partial s}{\partial t} + \gamma\beta c\dfrac{\partial s}{\partial x}$

$$\frac{\partial s}{\partial x'} = \frac{\partial s}{\partial t}\times\frac{\gamma\beta}{c} + \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\gamma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial s}{\partial t'} = \gamma\left\{\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial s}{\partial t} + \beta\cdot\dfrac{\partial s}{\partial x}\right\} \\ \dfrac{\partial s}{\partial x'} = \gamma\left\{\dfrac{\partial s}{\partial x} + \beta\cdot\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial s}{\partial t}\right\} \end{cases}$$

C'est bien une transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} S'^0 = \gamma(S^0 + \beta S^1) \\ S'^1 = \gamma(S^1 + \beta S^0) \end{cases}$$

On pourra alors écrire que $\begin{cases} \frac{1}{c}\partial_{t'} = \gamma(\frac{1}{c}\partial_t + \beta\partial_x) \\ \partial_{x'} = \gamma(\partial_x + \beta\frac{1}{c}\partial_t) \end{cases}$

2. $$\partial_t^2 s = c^2\left(\tfrac{1}{c}\partial_t\right)^2 s = c^2\gamma^2\left(\tfrac{1}{c}\partial_{t'} - \beta\partial_{x'}\right)^2 s$$
$$= c^2\gamma^2\left(\tfrac{1}{c^2}\partial_{t'}^2 s + \beta^2\partial_{x'}^2 s - 2\tfrac{\beta}{c}\partial_{t'}\partial_{x'} s\right)$$
$$\partial_x^2 s = \gamma^2\left(\partial_{x'} - \beta\tfrac{1}{c}\partial_{t'}\right)^2 s = \gamma^2\left(\partial_{x'}^2 s + \tfrac{\beta^2}{c^2}\partial_{t'}^2 s - \tfrac{2\beta}{c}\partial_{x'}\partial_{t'} s\right)$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 s - u^2\partial_x^2 s = \partial_{t'}^2 s\left(\gamma^2 - \tfrac{u^2}{c^2}\beta^2\gamma^2\right) + \partial_{x'}^2 s\left(c^2\beta^2\gamma^2 - \gamma^2 u^2\right)$$
$$+ \partial_{t'}\partial_{x'} s\left(-\tfrac{2\beta}{c}\gamma^2 c^2 + u^2\tfrac{2\beta}{c}\gamma^2\right)$$

d'où * terme en $\partial_{t'}\partial_{x'} s = 0 \Rightarrow \boxed{u^2 = c^2}$

et $\partial_t^2 s - u^2\partial_x^2 s = \partial_{t'}^2 s - c^2\partial_{x'}^2 s$.

3. L'équat° de propagation d'une onde qui se déplace à $u = c$ est invariante. C'est le fondement des lois de la relativité.

4. On doit avoir $u = u'$ $\Rightarrow u = \dfrac{u - V}{1 - uV/c^2} \Rightarrow u = c$.