

EXAMEN de RELATIVITÉ*Durée : 3 heures**Les calculatrices sont autorisées.**Barème approximatif : A = 3 pts ; B = 5 pts ; C = 18 pts.*

Noter que les parties A, B, C.1 et C.2 seront notées sur 20. La partie C.3 sera comptée en sus.

*Une écriture lisible et des graphes clairs ont une influence favorable sur l'humeur du correcteur.***Formulaire – Rappel de cours**

- On considère deux référentiels inertiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . \mathcal{R}' est animé par rapport à \mathcal{R} d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V \vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives \underline{A} et \underline{A}' dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' , on a $A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$ avec

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{où } \beta = V/c \text{ et } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (1)$$

Pour inverser la relation entre \underline{A} et \underline{A}' il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

- Soit $F^{\mu\nu}(\vec{r}, t)$ le tenseur électromagnétique. Il dépend du quadri-potential $\underline{A} = (\phi/c, \vec{A})$ de la façon suivante :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2)$$

On passe de la forme covariante $F_{\mu\nu}$ à la forme contravariante $F^{\mu\nu}$ grâce à la relation :

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma}, \quad (3)$$

où $g_{\mu\nu}$ désigne le tenseur métrique.

- La jauge de Lorentz s'écrit :

$$\partial_\mu \sqrt{-g} A^\mu = 0 \quad (4)$$

où g est le déterminant du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$.

- Les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère s'écrivent :

$$\partial_\mu \sqrt{-g} F^{\mu\nu} = \mu_0 \sqrt{-g} J^\nu, \quad (5)$$

où \underline{J} est le quadri-vecteur courant.

- En coordonnées cylindriques, l'opérateur Laplacien Δ s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (6)$$

A Question de cours

On note (\mathcal{R}) le référentiel du laboratoire et (\mathcal{R}') le référentiel propre d'une particule chargée qui se déplace à la vitesse constante β dans (\mathcal{R}) . On note $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

1. Tracer schématiquement (sans faire aucun calcul) les lignes du champ \vec{E} dans (\mathcal{R}) et (\mathcal{R}') pour les trois cas suivants : $\gamma = 1$, $\gamma = 5$, $\gamma \rightarrow \infty$.
2. Le LHC au CERN crée des collisions entre des paquets contenant chacun 10^{10} protons.
Pourquoi est-il impossible de maintenir au repos dans le laboratoire un de ces paquets ? Pourquoi est-il possible dans ce cas de faire rentrer ces paquets en collision ?

B Etude de l'effet Cherenkov

On considère un électron de vitesse constante $\beta = v/c$ qui se déplace dans un milieu d'indice n . Lorsque la vitesse de l'électron est supérieure à c/n , on observe l'émission d'ondes lumineuses dans le milieu, appelées *rayonnement Cherenkov*. L'enveloppe des ondes Cherenkov est un cône, dont le sommet est la position de la particule à chaque instant, et de demi-angle au sommet α (figure 1).

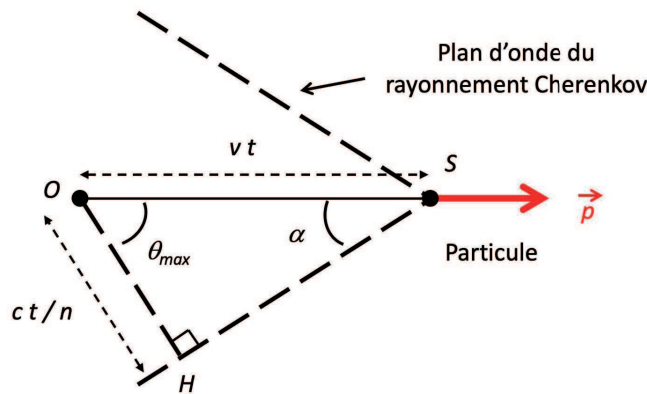


FIGURE 1 : Enveloppe des ondes Cherenkov.

On note \mathcal{E} et \vec{p} l'énergie totale et la quantité de mouvement de l'électron incident, et \mathcal{E}' et \vec{p}' ces mêmes quantités après l'émission du photon. On note ν la fréquence du photon émis.

On donne la masse de l'électron $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$.

On note \vec{u} un vecteur unitaire dans la direction d'émission du photon, et $\theta = (\vec{p}, \vec{u})$ l'angle d'émission du photon.

1. Ecrire la quantité de mouvement du photon en fonction de h , ν et n . En déduire les lois de conservation de l'énergie totale et de la quantité de mouvement.
2. Montrer que l'angle θ vérifie :

$$\cos(\theta) = \frac{2\mathcal{E} + h\nu(n^2 - 1)}{2pcn}$$

3. Montrer à partir du résultat de la question précédente que l'angle maximum d'émission θ_{max} vérifie :

$$\cos(\theta_{max}) = \frac{1}{n\beta}$$

et donner la relation entre θ_{max} et α .

4. Quelle est l'énergie minimale de l'électron pour obtenir une émission Cherenkov ? Faire l'application numérique pour $n = 4/3$.
5. A la limite des très hautes énergies, quelle est la longueur d'onde minimale λ_{min} du photon Cherenkov ?

On prendra $n = 4/3$, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, $\mathcal{E} = 500$ MeV et $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js.

C Délai Sagnac

C.1 Cinématique relativiste d'escargots sur un tourniquet

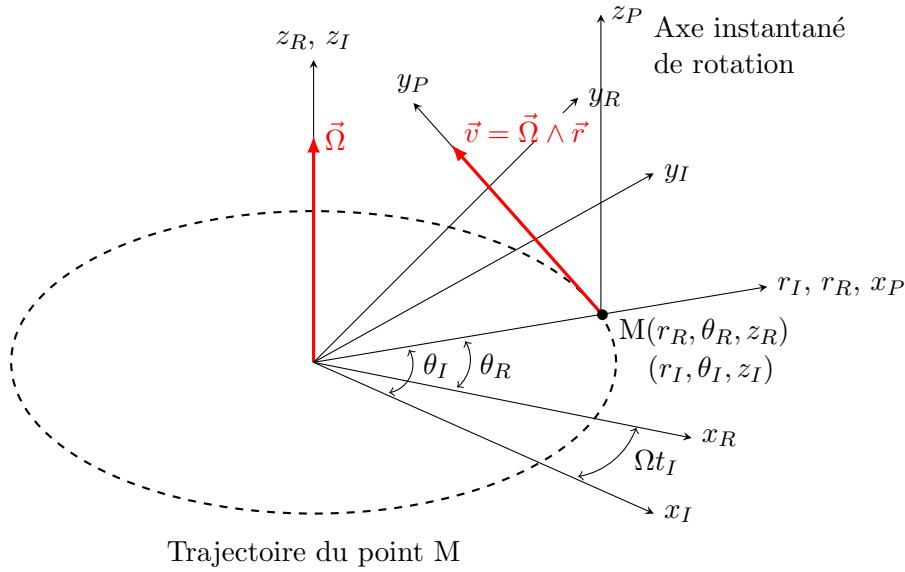


FIGURE 2 : Représentation des axes du référentiel inertiel (\mathcal{R}_I), du référentiel en rotation (\mathcal{R}_R) et du référentiel propre (\mathcal{R}_P).

L'évènement E_1 marque le départ d'une course entre deux escargots adoptant sur un tourniquet un même trajet circulaire à un rayon r , mais en sens inverse.

On introduit un observateur inertiel \mathcal{O}_I dont la quadri-vitesse et la ligne d'univers coïncident avec celles de l'observateur \mathcal{O}_R attaché au centre du tourniquet assimilé à un disque en **rotation circulaire uniforme** à la vitesse angulaire Ω dans le référentiel inertiel (\mathcal{R}_I) (voir figure 2).

Une possibilité permettant de tenir compte de la périodicité spatiale de la variable angulaire θ_I , qui interdit son utilisation dans la définition de la nouvelle variable temporelle t_R , consiste à utiliser la transformation de Galilée suivante¹ :

$$\begin{cases} r_R = r_I, \\ \theta_R = \theta_I - \Omega t_I, \\ z_R = z_I, \\ t_R = t_I. \end{cases} \quad (C1)$$

Des expériences internes au tourniquet ne donnent accès qu'à des coordonnées dérivées de celles de (\mathcal{R}_I) par une transformation de Lorentz, c'est-à-dire que si nous nous plaçons en un point M donné

¹Electromagnétisme des milieux diélectriques linéaires en rotation et application à la propagation d'ondes guidées, H.C. Lefevre et H.J. Arditty, APPLIED OPTICS, vol.21 , No 8, 15 Avril 1982

de (\mathcal{R}_R) , il faut considérer qu'à chaque instant l'observateur \mathcal{O}_P est dans un référentiel inertiel propre (\mathcal{R}_P) , dit **cotournant**, en translation par rapport à (\mathcal{R}_I) , à une vitesse $\vec{v} = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}(M)$.

On désigne par Γ le facteur de Lorentz entre (\mathcal{R}_P) et (\mathcal{R}_I) . Il vérifie :

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \Omega^2 / c^2}}. \quad (\text{C2})$$

On suppose que les escargots quittent l'observateur \mathcal{O}_P situé au point M lors de l'évènement \underline{E}_1 et le retrouvent aux évènements \underline{E}_2^+ et \underline{E}_2^- respectivement. Leurs lignes d'univers \mathcal{L}_R^+ et \mathcal{L}_R^- dans les coordonnées inertielles s'écrivent :

$$\mathcal{L}_R^+ : \begin{cases} x_R = r \cos(\omega^+ t_I) \\ y_R = r \sin(\omega^+ t_I) \\ t_R = t_I \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_R^- : \begin{cases} x_R = r \cos(\omega^- t_I) \\ y_R = r \sin(\omega^- t_I) \\ t_R = t_I \end{cases}, \quad (\text{C3})$$

où $\omega^+ > 0$ et $\omega^- < 0$ correspondent aux vitesses angulaires des gastéropodes.

1. a. En utilisant la définition des coordonnées (C1), exprimer l'intervalle de temps $t_2^+ - t_2^-$ dans (\mathcal{R}_R) entre les évènements \underline{E}_2^+ et \underline{E}_2^- en fonction de ω^+ , ω^- et Ω .
- b. En utilisant la dilatation des intervalles de temps, en déduire que la durée Δt_P dans le référentiel cotournant entre les évènements \underline{E}_2^+ et \underline{E}_2^- s'écrit :

$$\Delta t_P = \frac{2\pi}{\Gamma} \left(\frac{1}{\omega^+ - \Omega} - \frac{1}{\omega^- - \Omega} \right). \quad (\text{C4})$$

Par rapport à l'observateur inertiel \mathcal{O}_R , les vitesses de l'observateur \mathcal{O}_P , de l'escargot prograde et de l'escargot rétrograde, lors de leur départ en \underline{E}_1 , sont respectivement :

$$\vec{U} = r \Omega \vec{n}, \quad \vec{U}^+ = r \omega^+ \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{U}^- = r \omega^- \vec{n}.$$

Introduisons, à l'instant du départ, les vitesses des escargots par rapport à l'observateur \mathcal{O}_P :

$$\vec{v}^+ = v^+ \vec{y}_P \quad \text{et} \quad \vec{v}^- = -v^- \vec{y}_P.$$

Comme montré sur la figure 2, on a défini à un instant donné $\vec{n} \equiv \vec{y}_P$. Les vitesses \vec{v}^+ et \vec{v}^- sont alors reliées à \vec{U}^+ et \vec{U}^- à l'instant où elles sont colinéaires.

2. a. Exprimer ω^\pm en fonction de v^\pm et Ω par composition des vitesses.
- b. Discuter de la validité de ce résultat dans la limite ultra-relativiste $v^\pm \rightarrow c$.
3. Démontrer alors que l'intervalle de temps Δt_P dans le référentiel cotournant vérifie :

$$\Delta t_P = 2\pi \Gamma r \left(\frac{2r\Omega}{c^2} + \frac{1}{v^+} - \frac{1}{v^-} \right). \quad (\text{C5})$$

Par rapport à l'observateur cotournant \mathcal{O}_P , nous supposons désormais l'égalité des vitesses $v^+ = v^- = v$. Le temps propre de parcours de chaque escargot s'écrit :

$$\tau^+ = \tau^- = \frac{1}{\gamma} \frac{L_P}{v}. \quad (\text{C6})$$

4. a. Donner dans cette formule l'expression de γ en fonction de v et L_P en fonction Γ et r .
- b. Puisque $\tau^+ = \tau^-$, d'où vient la différence de temps Δt_P , aussi appelé délai Sagnac ?

C.2 Applications interférométriques du délai Sagnac

Le délai Sagnac étant proportionnel à la vitesse angulaire Ω , de nombreuses applications pratiques à la **gyrométrie** découlent de cet effet relativiste. En recombinaison de deux faisceaux lumineux contrapropagatifs de même fréquence f dans un interféromètre en rotation, le retard Sagnac se traduit par un déphasage $\Delta\phi$ que l'on voit apparaître dans le référentiel en rotation comme un décalage de franges ou un défilement d'anneaux d'interférences.

5. Montrer avec l'expression (C5) que dans la limite $r\Omega/c \ll 1$, le décalage correspond à :

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{4f}{c^2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{S}}. \quad (C7)$$

où $\vec{\mathcal{S}}$ représente la surface orientée indiquant l'aire délimitée par l'interféromètre.

Dans l'expérience historique de Sagnac, en 1913, la lumière utilisée avait une longueur d'onde $\lambda = 436$ nm, la fréquence de rotation était de $\Omega/2\pi = 2$ Hz et l'aire de l'interféromètre valait $\mathcal{S} = 0,0866$ m².

6. Quel déphasage $\Delta\phi$ a-t-il mesuré ?

Si l'on souhaite résoudre une vitesse angulaire bien plus faible, une première piste expérimentale consiste à augmenter l'aire \mathcal{S} . Michelson, Gale et Pearson construisent pour cela, en 1925 dans l'Illinois, un interféromètre rectangulaire de 613 m sur 339 m et conduisent la même expérience que Sagnac avec un faisceau lumineux à $\lambda = 570$ nm.

7. Justifier que l'expérience ainsi dimensionnée a pu leur permettre de déterminer la vitesse de rotation de la Terre Ω_{\oplus} . On prendra en compte le fait que l'Illinois se situe à la colatitude $\psi = 48,23^\circ$ par rapport au Nord.

De nos jours, les fibres optiques permettent de démultiplier la longueur du trajet dans l'interféromètre et donc d'augmenter sensiblement la résolution de cette gyrométrie Sagnac. Ce sont toutefois les gyrolasers qui équipent l'aviation moderne. Ces derniers, constitués de cavités laser de longueur L_{cav} présentent l'avantage de transformer le délai Sagnac en une différence de fréquences propres Δf des modes longitudinaux de résonance. Lorsqu'on met en rotation le gyrolaser, le battement à la fréquence Δf engendré à la superposition des signaux contrapropageants crée alors une figure d'interférence mobile qui est analysée.

8. a. Exprimer la différence de fréquence Δf en fonction de c , f , L_{cav} et $\vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{S}}$ sachant que l'intervalle spectral libre d'une cavité en anneau (c'est-à-dire l'intervalle entre deux fréquences de résonance) vaut c/L_{cav} .
- b. Estimer, pour un gyrolaser reposant sur une cavité circulaire de périmètre $L_{\text{cav}} = 30$ cm et sur un milieu à gain « Helium-Néon » centré sur la longueur d'onde $\lambda = 633$ nm, la fréquence du signal de battement engendré par une rotation de l'ordre de grandeur de Ω_{\oplus} . Commenter cette valeur.

Nous avons vu précédemment que l'effet Sagnac est purement géométrique et ne dépend pas de la nature et de la vitesse de propagation des signaux. L'expérience peut donc être réalisée en faisant interférer des ondes de matière, plutôt que des ondes lumineuses. On note Γ_p le facteur de Lorentz relativement à (\mathcal{R}_P) donnant dans ce référentiel une énergie $E = \Gamma_p mc^2$ à la particule matérielle de masse m . Le déphasage résultant vérifie une formule équivalente à (C7) :

$$\Delta\phi_p = 4\Gamma_p \frac{m}{\hbar} \vec{\Omega} \cdot \vec{\mathcal{S}}, \quad (C8)$$

où \hbar désigne la constante de Planck réduite.

9. a. Pour une même vitesse de rotation Ω , estimer et commenter le rapport entre les déphasages Sagnac mesurés avec un proton ultra-relativiste de masse au repos $m \simeq 0,9 \text{ GeV}/c^2$ et avec du rayonnement visible à $hf \simeq 2 \text{ eV}$.
- b. Pourquoi continue-t-on à équiper l'aviation de gyrolasers ?

C.3 Électrodynamique dans le référentiel tournant

Dans le référentiel en rotation (\mathcal{R}_R), les coordonnées ont les formes contravariante $x_R^{\mu \in [0,1,2,3]}$ et covariante $x_{R\mu}$ suivantes :

$$\begin{cases} x_R^\mu &= (ct_R, r_R, \theta_R, z_R) \\ x_{R\mu} &= (ct_R, -r_R, -r_R^2 \theta_R, -z_R) \end{cases} \quad (\text{C9})$$

10. a. Exprimer l'intervalle ds^2 dans le référentiel en rotation (\mathcal{R}_R) sachant que l'on a dans (\mathcal{R}_I) en coordonnées cylindriques :

$$ds^2 = c^2 dt_I^2 - dr_I^2 - r^2 d\theta_I^2 - dz_I^2. \quad (\text{C10})$$

- b. En partant de l'écriture suivante :

$$ds^2 = g_{R\mu\nu} dx_R^\mu dx_R^\nu, \quad (\text{C11})$$

déduire l'expression de la forme covariante du tenseur métrique $g_{R\mu\nu}$ sous la forme d'une matrice (g_R) de taille 4×4 .

- c. Quelle limite supérieure sur la coordonnée r de l'observateur cotournant retrouve-t-on avec le signe de g_{R00} ?
- d. Calculer le déterminant de la matrice $g = \det(g_{R\mu\nu})$.

On donne la forme contravariante $g_R^{\mu\nu}$ du tenseur métrique sous la forme de la matrice 4×4 :

$$(g_R^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Omega/c & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Omega/c & 0 & \frac{\Omega^2}{c^2} - \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C12})$$

Remarque : utiliser ce résultat pour répondre à la question précédente si cela n'a pas été fait.

11. a. En utilisant les équations de Maxwell (5) dans le vide, la relation de dépendance du potentiel (2), la relation (3) et la jauge de Lorentz (4), montrer que la composante A_{R3} du quadri-potentiel dans le référentiel en rotation (\mathcal{R}_R) satisfait à l'équation de propagation suivante :

$$\partial_\mu \sqrt{-g} g_R^{\mu\rho} \partial_\rho A_{R3} = 0 \quad (\text{C13})$$

- b. Expliciter cette équation et montrer qu'elle se résume au premier ordre en $r\Omega/c$ à l'équation de propagation :

$$\left(\square_R - \frac{2\Omega}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta_R \partial t_R} \right) A_{R3} = 0 \quad \text{avec le d'Alembertien} \quad \square_R = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_R^2} - \Delta_R. \quad (\text{C14})$$

On considère le cas de la propagation dans une fibre optique torique. On suppose que le rayon du mode se propageant est assimilable au rayon de courbure R_0 de la fibre et on néglige la dépendance en z (le problème étant essentiellement à 2 dimensions spatiales et la fibre centrée en $z = 0$).

En notant \mathcal{A} une composante quelconque du champ ou du potentiel et a_0 son amplitude, on cherche une solution à l'équation de propagation sous forme d'une onde harmonique de pulsation ω et de nombre d'onde angulaire K :

$$\mathcal{A}(\theta, t) = a_0 \exp[i(\omega t - K \theta)] \quad (\text{C15})$$

Les variations temporelles de \mathcal{A} doivent être identiques dans (\mathcal{R}_R) et dans (\mathcal{R}_P) .

12. En déduire une relation entre ω_R et ω_P .

En définissant l'indice de réfraction n du matériau, on montre que l'équation de propagation (C14) dans le milieu matériel devient :

$$\left(\Delta_R + \frac{n^2 \omega_R^2}{c^2} + 2i \frac{\omega_R \Omega}{c^2} \frac{\partial}{\partial \theta_R} \right) \mathcal{A}_R = 0 \quad (\text{C16})$$

13. Mettre en oeuvre une méthode de perturbation par rapport au cas où la fibre serait immobile dans (\mathcal{R}_I) (Ω nulle) pour résoudre cette équation différentielle, en cherchant la variation ΔK induite entre les nombres d'onde telle que :

$$K_R = K_I + \Delta K. \quad (\text{C17})$$

On introduit dans la fibre optique deux ondes contrarotatives de même pulsation ω_R en phase à l'angle d'entrée θ_0 . On peut montrer que la perturbation ΔK sur le nombre d'onde est indépendante du sens de propagation, si bien que les ondes s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathcal{A} \uparrow (\theta_R, t_R) = a_0 \exp[-i(\Delta K + K)(\theta_R - \theta_0) + i\omega_R t_R] \\ \mathcal{A} \downarrow (\theta_R, t_R) = a_0 \exp[-i(\Delta K - K)(\theta_R - \theta_0) + i\omega_R t_R] \end{cases} \quad (\text{C18})$$

L'effet Sagnac consiste à faire interférer les deux ondes après un tour de propagation en sens opposés.

14. a. Calculer l'intensité lumineuse dans le référentiel (\mathcal{R}_R) définie comme :

$$I_{\text{int}} = \mathcal{A}_{\text{int}} \cdot \mathcal{A}_{\text{int}}^* \quad \text{avec} \quad \mathcal{A}_{\text{int}} = \mathcal{A} \uparrow (\theta_0 + 2\pi, t_R) + \mathcal{A} \downarrow (\theta_0 - 2\pi, t_R). \quad (\text{C19})$$

b. Retrouver l'expression du déphasage $\Delta\phi$ obtenu précédemment par des considérations cinématiques.