L3 et Magistère 1ème année 12 mars 2024

PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Formulaire – Rappel de cours

On considère deux référentiels inertiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. $\mathcal{R}'$ est animé par rapport à $\mathcal{R}$ d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\,\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives A et A' dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$, on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,A^{\nu}$ avec

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{où} \quad \beta = V/c \quad \text{et} \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2} \; .$$

• Pour inverser la relation entre A et A' il suffit de changer le signe de β dans l'expression ci-dessus.

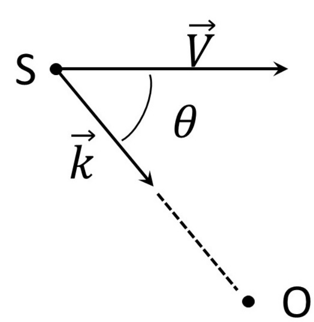
A Questions de cours

1. Donner les définitions du temps propre et de la longueur propre.
2. En considérant deux évènements bien choisis et deux référentiels différents (vous définirez clairement les deux évènements et les deux référentiels), démontrer l'expression de la dilatation des intervalles de temps.
3. Faire la même chose pour l'expression de la contraction des longueurs.

B Effet Doppler pour une étoile double

Une étoile double est un système stellaire composé de deux étoiles proches en orbite autour de leur centre d'inertie G. Une étoile double spectroscopique est constituée de deux étoiles trop proches pour être séparées par un télescope. Le mouvement de ces étoiles est étudié par la variation de longueur d'onde provoquée par l'effet Doppler.

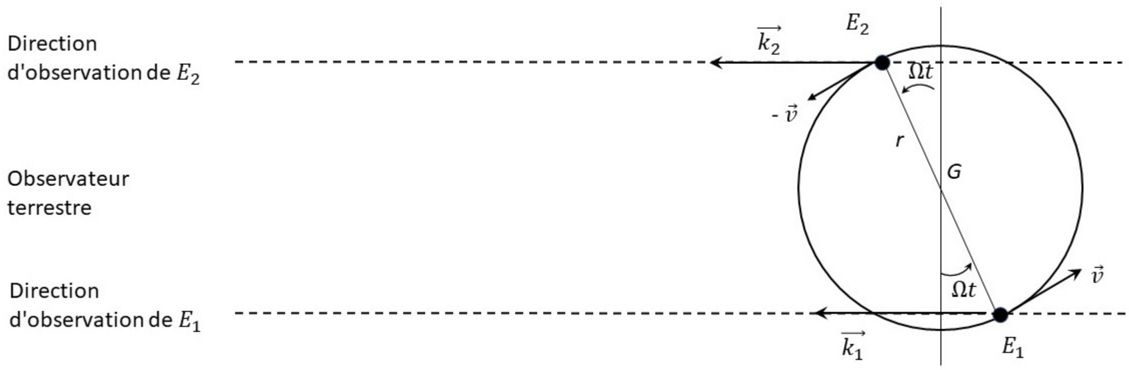
1/ Démonstration de l'effet Doppler. Une source lumineuse S se déplace dans le référentiel de l'observateur $\mathcal{R}$ à vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u_x}$. La direction du vecteur d'onde $\vec{k}$ qui relie la source S à l'observateur O, fait un angle θ avec la direction de déplacement de la source.



(a) Écrire la transformation de Lorentz qui permet d'exprimer le quadrivecteur d'onde $\mathcal{K}_0$ dans le référentiel propre de la source $\mathcal{R}_0$ en fonction du quadrivecteur d'onde $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{R}$.

(b) Calculer la fréquence ν et la longueur d'onde λ mesurées par l'observateur en fonction de $cos(\theta)$ et de respectivement ν_0 et λ_0.

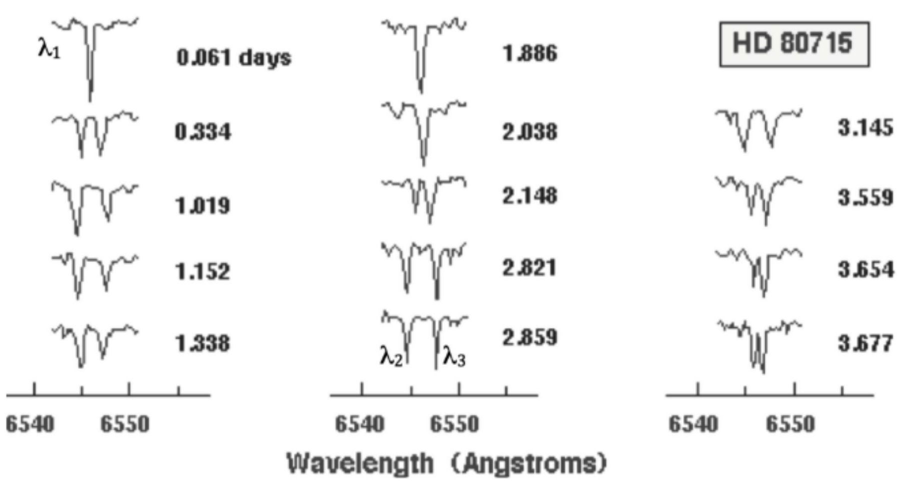
2/ Nous supposerons dans la suite de l'exercice que les deux étoiles ont la même masse et décrivent chacune un cercle de rayon r autour du centre d'inertie G à la vitesse angulaire Ω constante. Le centre d'inertie G est supposé immobile par rapport à l'observateur terrestre. De plus l'étoile double étant très éloignée de la Terre, les directions d'observation des deux étoiles E_1 et E_2 sont parallèles. Les directions des vecteurs d'onde k_1 et k_2 des radiations émises par E_1 et E_2 sont donc confondues avec la direction d'observation.



(a) Calculer la longueur d'onde λ_1 de l'étoile E_1 qui s'éloigne de la Terre au moment de l'observation, en fonction de λ_0 et la vitesse angulaire Ω.

(b) Même question pour la longueur d'onde λ_2 de l'étoile E_2 qui s'approche de la Terre au moment de l'observation.

(c) En déduire l'écart de longueur d'onde $\Delta\lambda = \lambda_1(t) - \lambda_2(t)$ mesuré en fonction de λ_0 et la vitesse angulaire Ω.



Crédit : "Observatoire de Paris / U.F.E."

3/ La figure ci-dessus représente l'évolution en fonction du temps (les jours sont indiqués verticalement) de la raie Hα dans le spectre de l'étoile double HD80715.

(a) Interpréter pourquoi on observe une seule raie au temps 0,061 jour et au temps 1,886 jour. En déduire la période de révolution des étoiles autour de leur centre d'inertie.

(b) Interpréter pourquoi les spectres au temps 1,338 jour et 3,145 jours semblent identiques ?

(c) Estimer la vitesse angulaire des étoiles sur leur orbite et le rayon de l'orbite.

C Signaux d'un vaisseau spatial.

En l'an 2905, Vénus a été colonisée et une ligne de vaisseaux spatiaux assure une connexion régulière avec la Terre. On fera l'hypothèse que pendant le temps de trajet des vaisseaux, les deux planètes sont immobiles. Pour économiser le carburant, les vaisseaux suivent strictement la même route dans les deux directions. Lorsque deux vaisseaux s'approchent l'un de l'autre dans des directions opposées, afin d'éviter la collision, ils échangent un signal radio pour qu'ils dévient temporairement de la trajectoire. A un instant donné, pris comme origine $t = 0$ dans le référentiel Terrestre $\mathcal{R}$, deux vaisseaux A et B se trouvent sur une trajectoire de collision. On définit l'axe des x comme la ligne rejoignant A et B à $t = 0$. On définit l'origine $x = 0$ dans $\mathcal{R}$ par la position de A à $t = 0$. Dans le référentiel $\mathcal{R}$, le vaisseau A a une vitesse v_A et le vaisseau B a une vitesse $-v_B$. À $t = 0$ ils sont séparés par une distance L dans $\mathcal{R}$. Pour éviter la collision, le vaisseau A envoie un signal au vaisseau B à $t = 0$. Exactement lorsque le signal est reçu par le vaisseau B, il confirme sa réception en envoyant un second signal au vaisseau A qui peut ainsi dévier de sa trajectoire.

Définissons les évènements suivants dans $\mathcal{R}$:

- L'origine $E_A = (0, 0)$.
- Le point de l'espace-temps $E_B = (0, L)$ donnant la position de B à $t = 0$.
- E_1 le point de l'espace-temps lorsque le premier signal envoyé par le vaisseau A atteint le vaisseau B.
- E_2 le point de l'espace-temps lorsque le second signal envoyé par le vaisseau B atteint le vaisseau A.

Appelons $\mathcal{R}'$ le référentiel propre de A.

1. Représenter dans un diagramme d'espace-temps de Minkowski, la trajectoire de A, de B et les signaux échangés dans $\mathcal{R}$.
2. Placer les évènements E_A, E_B, E_1 et E_2 sur le diagramme.
3. Trouver les expressions des évènements E_1 et E_2 dans $\mathcal{R}$.
4. Trouver les expressions correspondantes de E'_1 et E'_2 dans $\mathcal{R}'$.
5. Montrer que E'_1 peut être écrit sous la forme $(c\tau', c\tau')$. Quelle est la signification de τ' ?
6. Quelle est la pseudo-norme de E'_1 ? Pourquoi ?

7. Calculer la position du vaisseau B en fonction du temps dans le référentiel $\mathcal{R}'$.
8. Trouver les expressions des évènements E'_A et E'_B dans $\mathcal{R}'$. Est-ce que ces évènements sont simultanés dans $\mathcal{R}'$?
9. Démontrer la loi de composition des vitesses suivant l'axe des x.
10. Re-obtenir le résultat pour la trajectoire de B dans $\mathcal{R}'$ en utilisant la loi de transformation des vitesses.
11. Retracer le diagramme d'espace-temps de la question 1 dans le référentiel $\mathcal{R}'$.