

PARTIEL de RELATIVITÉ

Durée : 2 heures

Les calculatrices sont autorisées. Barème approximatif : A = 8 pts ; B = 5 pts ; C = 8 pts.

Formulaire – Rappel de cours

Soient \mathcal{R} et \mathcal{R}' deux référentiels inertiels. \mathcal{R}' est animé par rapport à \mathcal{R} d'un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$. Si un quadri-vecteur a pour expressions respectives \underline{A} et \underline{A}' dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' , on a $A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$ où l'expression de Λ^{μ}_{ν} est donnée dans (1), où $\beta = V/c$ et $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Pour inverser la relation entre \underline{A} et \underline{A}' il suffit de changer le signe devant β dans l'expression (1).

On rappelle le phénomène de contraction des longueurs : une règle immobile, de longueur L_0 et portée par l'axe $O'x'$ dans \mathcal{R}' apparaîtra comme ayant une longueur L_0/γ dans \mathcal{R} .

A Élargissement des raies dans le spectre d'une nova

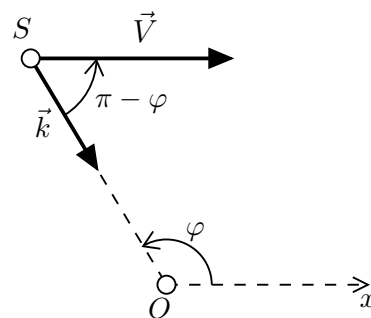
On considère une source lumineuse ponctuelle (un atome) qui émet dans son référentiel propre \mathcal{R}' un rayonnement lumineux monochromatique de fréquence ν' et de longueur d'onde λ' . Cette source se déplace à vitesse constante V par rapport au référentiel \mathcal{R} d'un observateur terrestre.

On se placera dans le cadre des transformations spéciales de Lorentz, i.e. on choisira les axes Ox et Ox' des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' parallèles à la direction du mouvement relatif.

1/ La source ponctuelle S émet un rayonnement reçu par l'observateur O dans le référentiel \mathcal{R} sous un angle φ , cf. la figure ci-dessous qui est tracée dans \mathcal{R} .

- Quelles sont la fréquence ν et la longueur d'onde λ du rayonnement détecté dans \mathcal{R} en fonction de l'angle φ de la ligne de visée de l'observateur ?
- La longueur d'onde détectée par l'observateur dépend de l'orientation de la trajectoire de la source dans \mathcal{R} , et en particulier de la valeur de φ . Suivant les configurations, λ varie donc entre des valeurs extrêmes qu'on notera λ_{\min} et λ_{\max} .

Expliciter quels sont ces deux cas limites en faisant un schéma à chaque fois. Exprimer les valeurs correspondantes λ_{\min} et λ_{\max} en fonction de $\beta = V/c$ et λ' uniquement.



2/ Certaines étoiles sont le siège d'explosions qui éjectent de la matière de façon isotrope : c'est le phénomène de nova (ou de supernova dans les cas les plus violents). Le rayon de la sphère de matière éjectée croît, dans \mathcal{R} , à la vitesse constante V . Les atomes de l'éjecta (Ca, O, Fe, Ne, etc) émettent des photons par désexcitation de leurs nuages électroniques. Chaque atome peut être vu comme une

source ponctuelle se déplaçant dans \mathcal{R} à la vitesse V . En mesurant la distribution des longueurs d'onde des photons reçus sur Terre, on observe un ensemble de raies spectrales caractéristique des éléments chimiques présents.

L'observateur situé sur Terre s'intéresse à une raie lumineuse particulière, de longueur d'onde λ' dans le référentiel au repos de l'atome émetteur. À cause de l'effet Doppler dû à la vitesse de l'éjecta et de l'isotropie des directions d'éjection, l'observateur observe un élargissement $\Delta\lambda = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$ de cette raie. Exprimer la vitesse d'éjection V en fonction du taux d'élargissement $r = \Delta\lambda/\lambda'$.

3/ Sachant que le rayon angulaire sous lequel est vu l'éjecta depuis la Terre augmente d'un angle $\Delta\alpha$ pendant une durée Δt , exprimez la distance D entre la nova et la Terre en fonction de r et $\Delta\alpha/\Delta t$. Que devient cette expression lorsque $V \ll c$?

On fera, dans les questions suivantes, l'application numérique pour la raie $\lambda' = 393.3$ nm du calcium. On constate une largeur de raie due à l'effet Doppler de $\Delta\lambda = 1.1$ nm.

- (a) Calculez la vitesse d'éjection V des gaz de la nova. L'utilisation de la formule non relativiste est-elle justifiée dans ce cas?
- (b) On constate une augmentation du rayon angulaire de l'éjecta $\Delta\alpha = 0.20''$ en un an. Quelle est, en années-lumière, la distance entre la nova et la Terre?

B Désintégration d'un méson D^0

Un méson D^0 se désintègre en un méson \bar{K}^0 et un pion π^0 .

1/ Calculer l'énergie et la vitesse du pion dans le référentiel propre du D^0 .

2/ Le pion se désintègre ensuite en deux photons. Calculer les énergies minimale et maximale de chaque photon dans le référentiel propre du D^0 .

Dans la réponse à chaque question on donnera un résultat analytique et la valeur numérique correspondante. Les masses respectives des mésons D^0 , \bar{K}^0 et π^0 sont $1.86 \text{ GeV}/c^2$, $0.50 \text{ GeV}/c^2$ et $0.13 \text{ GeV}/c^2$.

C Le paradoxe du train et du tunnel

Un train de longueur ℓ (dans son référentiel propre \mathcal{R}') se dirige vers un tunnel de longueur ℓ (dans son référentiel propre \mathcal{R}) à la vitesse V . La sortie du tunnel est munie d'une porte close qui peut être ouverte par un opérateur au repos dans \mathcal{R} . L'opérateur fait en sorte que la porte s'ouvre à l'instant précis où l'extrémité arrière du train entre dans le tunnel. Dans cet exercice, nous étudierons si il y a collision ou pas entre le train et la porte.

1/ Soulever¹ un paradoxe en utilisant la contraction des longueurs (voir formulaire) en vous plaçant soit dans \mathcal{R} , soit dans \mathcal{R}' .

2/ Tracer un diagramme de Minkowski dans \mathcal{R} avec les lignes d'univers de l'entrée et de la sortie du tunnel, et de la tête et de la queue du train. Il est important de spécifier de façon claire où vous choisissez de placer l'évènement origine commun aux deux référentiels. Placer précisément sur le diagramme l'évènement A "l'arrière du train entre dans le tunnel" et l'évènement B "ouverture de la porte de sortie".

3/ Même question dans \mathcal{R}' . Résolvez alors le paradoxe.

¹Quelques phrases suffisent, pas besoin d'un long exposé, ni de calculs.