L3 **2024-2025**
Mathématiques **Institut Villebon-Charpak**

Notes de cours 01

Calcul matriciel : Rappels, Exercices, `numpy`

Table des matières

1 Calcul matriciel élémentaire, sommes, produits, puissances **1**

2 Trace et déterminant **6**

3 Noyau, image, théorème du rang **10**

4 Inversibilité. **12**

5 Calculs de puissances. **17**

6 En `Python/Numpy`. **17**

L'objet de ces pages est de vous faire réviser les notions premières de calcul matriciel : construction de matrices, combinaisons linéaires de matrices, multiplication de matrices de tailles appropriées.

Les notations et résultats supposés connus seront rappelés au fûr et à mesure (à mettre dans votre lexique personnel).

1 Calcul matriciel élémentaire, sommes, produits, puissances

Exercice 1.— Voici 4 matrices A,B,C,D (lignes). Indiquer tous les produits possibles en prenant deux matrices parmi ces 4 ou leurs transposées (qui sont des matrices colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction Ex.–1

- Les produits ligne/ligne ou colonne sont impossibles.
- Les 8 produits ligne x colonne possibles sont $A.A^\top$, $A.D^\top$, $D.D^\top$, $D.A^\top$, $B.B^\top$, $B.C^\top$, $C.C^\top$, $C.B^\top$. Les résultats sont des nombres (matrices 1×1).
- Les 16 produits colonne x ligne sont possibles, par exemple $A^\top.B$ donne une matrice de taille 4×5, c'est à dire dans $\mathscr{M}_{4,5}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.— Même exercice avec les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & +1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction Ex.–2

— Les produits $A.A^\top$, $A^\top.A$, $B.B^\top$, $B^\top.B$, $C.C^\top$, $C^\top.C$, $D.D^\top$, $D^\top.D$. D'une façon générale les deux produits $M.M^\top$, $M^\top.M$ sont toujours possibles, donnent des matrices carrées et plus précisémment si $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors $M.M^\top \in \mathscr{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ et $M^\top.M \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

— Les produits suivant sont possibles (on indique la taille du résultat)

$$A.B \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}), A.D \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}), A.D^\top \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R}), B.A \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}), B.C \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}), B.C^\top \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R}), C.A \in .$$

et les produits transposés -attention, la transposée d'un produit est le produit des transposées lu dans l'ordre inverse, ce qui produit quelques doublons : par exemple $(A.D^\top)^\top = D.A^\top$.

Exercice 3.— Rappeler la formule du produit matriciel (c'est l'occasion de poser des notations « abstraites ».

Correction Ex.–3

Supposons que $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ alors le produit $A.B$ est possible, $A.B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et pour $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,p\}$ [1], on a

$$[A.B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}.[B]_{kj}.$$

On peut en donner une version plus abstraite (parlante ?) en utilisant la notion d'ensemble d'indices (à la place des ensembles du type $\{1,\dots,n\}$).

Soient I, J, K des ensembles finis d'indices, A une matrice (à coefficients dans $\mathbb{R}$) indicée par $I \times K$, B une matrice indicée par $K \times J$ alors le produit matriciel $A.B$ est possible (les formes sont compatibles) et la matrice produit $C = A.B$ est indicée par $I \times J$ avec

$$\boxed{\forall (i,j) \in I \times J,\ [C]_{ij} = \sum_{k \in K} [A]_{ik}.[B]_{kj}}$$

On peut remarquer (cette remarque permet de poser un produit matriciel de la façon que vous connaissez bien, je ne fais pas le dessin) que la matrice C est la matrice, comportant en ligne i, colonne j, le produit de la ligne $[A]_{i.}$ (ligne numéro de i de A) par la colonne $[B]_{.j}$ (colonne numéro j de B).

Enfin, on peut donner une version informatique en « Pseudo-Python » :

1. en notant $[C]_{ij}$ l'entrée de la matrice C située en ligne i, colonne j

```
def produit_matrices(A,B) :
    #m = nbre lignes de A
    #n = nbre colonnes de A = nbre lignes de B
    #p = nbre colonnes de B
    #C = Nlle matrice n x p
    for i in range(m) :    # pour chaque ligne
        for j in range(p) :#pour chaque colonne
            C[i,j] = 0     #On prépare l'entrée
            for k in range(n) : # Boucle de sommation
                C[i,j] += A[i,k] * B[k,j]
    return C
```

Exercice 4.— Si A,B et C sont des matrices dont les tailles font que les produits $A.B$ et $B.C$ sont possibles. Montrer qu'alors les produits $(A.B).C$ et $A.(B.C)$ sont possibles, donnent des matrices de même taille et enfin, que ces matrices sont égales.

Correction Ex.–4

A savoir : $(A.B).C = A.(B.C)$ pour toute matrices A,B,C à partir du moment où les tailles sont compatibles. La valeur commune est notée $A.B.C$ sans parenthèses. Permet de définir les expressions du type $A.B.C.D....M$ où tous les facteurs du produit sont des matrices de tailles compatibles pour les produits.

On introduit les notations concernant les indices possibles : A est de taille $m\times n$ (ou (m,n) ou $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, B est de taille $n\times p$ (car $A.B$ est possible), C de taille $p\times q$ (car $B.C$ est possible) où m,n,p,q sont des entiers naturels (≥ 1).

— $(A.B)$ est de taille $m\times p$, C de taille $p\times q$ donc $(A.B).C$ est possible, de taille $m\times q$,
— A est de taille $m\times n$, $(B.C)$ de taille $n\times q$ donc $A.(B.C$ est possible, de taille $m\times q$.

Notons les ensembles d'indices $I=\{1,\dots,m\}$, $J=\{1,\dots,n\}$, $K=\{1,\dots,p\}$, $L=\{1,\dots,q\}$. On a pour $(i,\ell)\in I\times L$,

$$[(A.B).C]_{i\ell} = \sum_{k\in K}[A.B]_{ik}.[C]_{k\ell} = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J}[A]_{ij}.[B]_{jk}\right).[C]_{k\ell} = \sum_{(k,j)\in K\times J}[A]_{ij}.[B]_{jk}.[C]_{k\ell}$$

et de même

$$[A.(B.C)]_{i\ell} = \sum_{j\in J}[A]_{ij}.[B.C]_{j\ell} = \sum_{j\in J}[A]_{ij}.\left(\sum_{k\in K}[B]_{jk}.[C]_{k\ell}\right) = \sum_{(j,k)\in J\times K}[A]_{ij}.[B]_{jk}.[C]_{k\ell}$$

Il vient $[(A.B).C]_{i\ell} = [A.(B.C)]_{i\ell}$ car les deux symboles de $\sum$ somment les mêmes termes (observer la correspondance évidente dans les couples « indices de sommation »).

Comme ceci est vrai pour tout $(i,\ell)\in I\times L$, on obtient $(A.B).C = A.(B.C)$.

Exercice 5.— Donner des exemples de matrices A et B pour lesquels l'évaluation des produits $A.B$ et $B.A$ donne des résultats différents. On finira avec A et B de même taille.

Correction Ex.–5

On observe différents cas de figure

— Un produit possible, pas l'autre : $A\in\mathscr{M}_{3,2}$, $B\in\mathscr{M}_{2,4}$, $A.B\in\mathscr{M}_{3,4}$, $B.A$ impossible.
— Les deux produits possibles, de tailles différentes : $A\in\mathscr{M}_{3,2}$, $B\in\mathscr{M}_{2,3}$, $A.B\in\mathscr{M}_{3,3}$, $B.A\in\mathscr{M}_{2,2}$.

— Le cas « carré » (je prends un peu « au hasard [2] », c'est assez rare qu'on tombe directement sur un cas de commutation) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}, B.A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.— Quel lien y a-t-il entre la transposee d'un produit et le produit des transposées ? Pouvez vous le démontrer ?

Correction Ex.–6

À savoir ! pour toutes matrices A et B, pourvu que le produit $A.B$ soit possible :

$$(A.B)^\top = B^\top.A^\top$$

Ceci s'étend au produit d'un nombre fini de matrices $A, B, C, \ldots, M$:

$$(A.B.C\ldots.M)^\top = M^\top\ldots.C^\top.B^\top.A^\top$$

On reprend les notations de l'exercice 3. On suppose A indicée par $I \times J$, B indicée par $J \times K$ et donc :

— $A.B$ indicée par $I \times K$,, $(A.B)^\top$ indicée par $K \times I$,

— $A^\top$ indicée par $J \times I$, $B^\top$ indicée par $K \times J$ et $B^\top.A^\top$ indicé par $K \times I$, ce qui est un premier pas vers l'égalité cherchée.

Soit $(k,i) \in K \times I$. On a

— D'une part :

$$[(A.B)^\top]_{ki} = [A.B]_{ik} = \sum_{j \in J} [A]_{ij}.[B]_{jk};$$

d'autre part :

$$[B^\top.A^\top]_{ki} = \sum_{j \in J} [B^\top]_{kj}.[A^\top]_{ji} = \sum_{j \in J} [B]_{jk}.[A]_{ij}.$$

— On en conclut, comme $\forall (i,j,k)$, $[B]_{jk}.[A]_{ij} = [A]_{ij}.[B]_{jk}$, que

$$\forall (k,i) \in K \times I,\ [(A.B)^\top]_{ki} = [B^\top.A^\top]_{ki}$$

et donc

$$(A.B)^\top = B^\top.A^\top.$$

Exercice 7.— Matrices triangulaires, diagonales.

1. Rappeler ce qu'est une matrice (carrée) triangulaire supérieure, triangulaire, inférieure, diagonale.

2. Montrer en utilisant la formule du produit matriciel que le produit de deux matrices (carrées) diagonales est une matrice diagonale dont on précisera les coefficients.

3. Montrer de même que le produit de deux matrices (carrées) triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure dont on précisera les coefficients.

Correction Ex.–7

2. dans l'exemple, les deux matrices sont transposées l'une de l'autre, et alors ?

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

— A est dite triangulaire supérieure si ses coefficients sous la diagonale (principale, dans une ùmatrice carrée c'est la seule diagonale ! !) sont nuls. C'est à dire

$$A \text{ triangulaire supérieure } \Leftrightarrow \forall (i,j) \in (\{1,\ldots,n\})^2, i > j \Rightarrow [A]_{ij} = 0$$

— A est dite triangulaire inférieure si ses coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls. C'est à dire

$$A \text{ triangulaire inférieure } \Leftrightarrow \forall (i,j) \in (\{1,\ldots,n\})^2, i < j \Rightarrow [A]_{ij} = 0$$

— A est dite diagonale si ses coefficients hors de de la diagonale sont nuls. C'est à dire

$$A \text{ triangulaire supérieure } \Leftrightarrow \forall (i,j) \in (\{1,\ldots,n\})^2, i \neq j \Rightarrow [A]_{ij} = 0$$

Noter que ces définitions ne disent pas comment doivent être les « autres coefficients » : la matrice nulle de taille $n \times n$ esst à la fois tringulaire sup., trinagulaire inf., diagonale...

Une matrice est diagonale ssi elle est à la fois triangulaire supérieure et inférieure.

2. Supposons que A, et B sont diagonales de taille $n \times n$, Soit $C = A.B$. Soient $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.

On a

$$[C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}.[B]_{kj}$$

— Si $i \neq j$, dans cette somme, l'indice de sommation k est forcément différent de i ou de j et donc, l'un des deux nombres $[A]_{ik}$, ou $[B]_{kj}$ est nul et leur produit est nul.
La matrice est donc diagonale.

— Si $i = j$, dans la somme, on peut garantir que tous les termes $[A]_{ik}.[B]_{ki}$ avec $k \neq i$ sont nuls et donc il reste

$$[C]_{ij} = [A]_{ii}.[B]_{ii}$$

3. Supposons que A, et B sont triangulaires supérieures de taille $n \times n$, Soit $C = A.B$. Soient $i, j \in \{1,\ldots,n\}$.

On a

$$[C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik}.[B]_{kj}$$

Dans cette somme, dès que l'indice de sommation k est $< i$ ou $> j$, l'un des deux nombres $[A]_{ik}$, ou $[B]_{kj}$ est nul et leur produit est nul. On peut donc « élaguer l'ensemble des indices de sommation » et ne considérer qu'une somme où les indices k sont à la fois $\geq i$ et $\leq j$.

— Si $i > j$, il n'y a aucun indice k tel que $k \geq i$ et $k \leq j$, la somme vaut donc 0 *i.e.* $[C]_{ij} = 0$. La matrice C est triangulaire supéieure.

— Si $i \leq j$, on a

$$[C]_{ij} = \sum_{k=i}^{j} [A]_{ik}.[B]_{kj}$$

et en particulier, si $i = j$,

$$[C]_{ii} = [A]_{ii}.[B]_{ii}.$$

En ce qui concerne les matrice triangulaires inférieures, pas besoin de revenir à la définition du produit, un argument par transposition suffit : une matrice est triangulaire supérieure si et seulement si sa transposée est tringulaire inférieure.

Via la formule donnant la transposée d'un produit, on en déduit (assez facilement), que le produit de deux matrices triangulaires inférieures est encoreune matrice triangulaire inférieure.

Exercice 8.— Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $M(\theta)$ définie par

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1. Pour θ, ϕ, montrer qu'il existe $\psi \in \mathbb{R}$ tel que $M(\theta).M(\phi) = M(\psi)$.
2. En déduire (rédiger la récurrence), une formule donnant $M(\theta)^n$, pour $n \in \mathbb{N}$. Et pour $n \in \mathbb{Z}$?
3. On constitue une matrice 4x4 « par blocs » $N(\theta_1, \theta_2)$ en posant

$$N(\theta_1,\theta_2) = \begin{pmatrix} M(\theta_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(\theta_2) \end{pmatrix}$$

Comment s'écrit $N(\theta_1,\theta_2).N(\phi_1,\phi_2)$? Que vaut $N(\theta_1,\theta_2)^n$

Correction Ex.–8
1. Le calcul direct (et la connaissance des formules basiques de la trigonométrie) donne

$$\forall \theta,\, \phi \in \mathbb{R}, M(\theta).M(\phi) = M(\theta+\phi)$$

2. On obtient

$$\forall \theta, \forall n \in \mathbb{Z}, M(\theta)^n = M(n.\theta)$$

Dans le cas $n \in \mathbb{N}$ car $M(0) = I_2$ et $M((n+1).\theta) = M(n.\theta).M(\theta)$ (on pourrait mieux rédiger cela ?.

Puis, comme $M(\theta).M(-\theta) = M(\theta-\theta) = M(0) = I_2$, $M(\theta)$ est inversible et lorsque la puissance est négative, avec calcul d'inverse et le cas puissance positive appliqué à $-\theta$: si $n \in \mathbb{N}$,

$$M(\theta)^{-n} = (M^{-1}(\theta))^n = M(-\theta)^n = M(-n.\theta)$$

3. On peut calculer par « blocs » pour voir que

$$N(\theta_1,\theta_2).N(\phi_1,\phi_2) = \begin{pmatrix} M(\theta_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(\theta_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M(\phi_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(\phi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(\theta_1).M(\phi_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M(\theta_2).M(\phi_1) \end{pmatrix}$$

et donc

$$N(\theta_1,\theta_2).N(\phi_1,\phi_2) = N(\theta_1+\phi_1, \theta_2+\phi_2)$$

L'enseignement du calcul par blocs c'est que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.A'+B.C' & A.B'+B.D' \\ C.A'+D.B' & C.B'+D.D' \end{pmatrix}$$

On calcule avec des matrices par blocs en utilisant les mêmes formules que pour les matrices de scalaires ! Il faut cependant faire attention aux question de commutation, il n'y a pas de raison que $A.B' = B'.A$

On a (même principe de démonstration que pour M) :

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, N(\theta_1,\theta_2)^n = N(n.\theta_1, n.\theta_2).$$

2 Trace et déterminant

Exercice 9.— Trace.
1. Rappeler la définition de la trace d'une matrice carrée.

2. Démontrer que pour deux matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{Tr}(A.B) = \mathrm{Tr}(B.A)$$

Indication:On évaluera les tailles des matrices en jeu et on évaluera par la formule du produit matriciel les éléments diagonaux $[A.B]_{ii}$ et $[B.A]_{jj}$.

3. Quelle la dimension du $\mathbb{K}$-sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ composé de toutes les matrices de trace nulle ?

Correction Ex.–9

1. Il s'agit d'une formule à connaître, la trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.

Si A est une matrice carrée, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, sa *trace*, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{ii}.$$

2. Une propriété fondamentale en est la possibilité de déplacer les facteurs dans la trace d'un produit matriciel

$$\forall A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R}), B \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(A.B) = \mathrm{Tr}(B.A)$$

Ce qui est étonnant dans cette formule c'est son application à trois matrices :

$$\mathrm{Tr}(A.B.C) = \mathrm{Tr}(C.A.B) = \mathrm{Tr}(B.C.A)$$

Il n'y a aucune raison que ce nombre vaille $\mathrm{Tr}(B.A.C)$, seules certaines permutations des trois lettres A, B, C ne sont permises !

Démonstration. On démontre la formule demandée avec les mêmes notations que dans l'exercice 3.

On suppose que l'ensemble d'indices de A est $I \times J$, l'ensemble d'indices de B, $J \times I$. On a alors que l'ensemble d'indices de $A.B$ est $I \times I$ et celui de $B.A$ est $J \times I$.

On a

$$\mathrm{Tr}(A.B) = \sum_{i \in I} [A.B]_{ii} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} [A]_{ij}.[B]_{ji} \right)$$

Par symétrie,

$$\mathrm{Tr}(B.A) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} [B]_{ji}.[A]_{ij} \right)$$

Ces deux sommes (doubles) sont égales car égales à

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} [A]_{ij}.[B]_{ji}.$$

□

Exercice 10.—

Soit M une matrice réelle de taille $m \times n$. Montrer que les deux produits $M.M^\top$ et $M^\top.M$ sont toujours possibles. Montrer que si la trace de $M.M^\top$ vaut 0 alors la matrice M est la matrice nulle.

Correction Ex.–10

Soit M une matrice réelle de taille $m \times n$. La matrice $M^\top$ est une matrice réelle de taille $n \times m$.
Les deux produits $M.M^\top$ et $M^\top.M$ sont donc possibles, respectivement de taille $n \times n$ et $m \times m$.
Si on applique la formule trouvée dans l'exercice 9, on obtient

$$\mathrm{Tr}(M.M^\top) = \sum_{(i,j)} [M]_{ij}.[M^\top]_{ji} = \sum_{(i,j)} [M]_{ij}^2.$$

Si cette quantité vaut 0, on a affaire à une somme nulle de carrés de nombres réels (tous positifs !), chacun de ces carrés est donc nul et finalement $M = 0$.

Exercice 11.— Existe-t-il deux matrices A et B, carrées de même taille $n \times n$ telles que $A.B - B.A = I_n$?

Correction Ex.–11

Si c'était le cas, en prenant la trace de chaque terme de cette identité, il viendrait (la trace d'en somme de matrices carrées est la somme des traces,..) et en utilisant en dernier recours la propriété sur la trace d'un produit, on a :

$$n = \mathrm{Tr} I_n = \mathrm{Tr}(A.B - B.A) = \mathrm{Tr}(A.B) - \mathrm{Tr}(B.A) = \mathrm{Tr}(A.B) - \mathrm{Tr}(A.B) = 0$$

Ceci n'est pas possible...

Exercice 12.— Déterminant.
1. Donner la définition du déterminant d'une matrice carrée. (plusieurs réponses possibles)
2. Donner le lien entre $\det(A.B)$, $\det(A)$, $\det(B)$ (on suppose toutes ces matrices carrées, de même taille). Savez vous démontrer cette relation ?

Correction Ex.–12

1. Rappelons que pour une matrice 2×2,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = a.d - b.c$$

On peut remarquer que $\det(A.A') = \det(A).\det(A')$ et c'est déjà une formule non triviale en termes de calculs :

On note $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ donc

$$A.A' = \begin{pmatrix} a.a' + b.c' & a.b' + b.d' \\ c.a' + d.c' & c.b' + d.d' \end{pmatrix}$$

L'identité précédente dit que

$$(a.a' + b.c').(c.b' + d.d') - (a.b' + b.d)'.(c.a' + d.c') = (a.d - b.c).(a'.d' - b'.c').$$

Il y a plusieurs présentations du déterminant d'une matrice carrée de taille $n \times n$. Si vous ne comprenez pas les termes de l'une d'entre elle, c'est que cette présentation n'est pas au programme...

Il n'est pas raisonnable de vous poser cette question en contrôle...

1. Par une formule horrible :

$$\det(A) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma). \prod_{i=1}^{n} [A]_{i\sigma(i)}$$

   où la somme porte sur les $n!$ permmutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ (un nombre valant ± 1).

2. Par une propriété abstraite incompréhensible :
   Ecrivons une matrice carrée A comme juxtaposition de vecteurs colonne $A = (V_1|\dots|V_n)$, ce qui permet d'identifier A avec un n-uplet de vecteurs $(V_1,\dots,V_n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^n$. L'application det est la *seule* forme n-multilinéaire alternée sur $(\mathbb{R}^n)^n$ valant 1 en $(E_1,\dots,E_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
3. Par récurrence sur la taille de la matrice, en développant suivant la dernière ligne (ou colonne, ça dépend du goût du définisseur). Si A est de taille $(n+1)\times(n+1)$

   $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+n+1} \det{[A]_{\widehat{n+1}\widehat{j}}}$$

   où $(A)_{\widehat{n+1}\widehat{j}}$ désigne la matrice de taille $n\times n$ obtenue en « gommant » (c'est le sens de la notation $\widehat{k}$, gommer k de l'ensemble des indices) la ligne $(n+1)$ et la colonne j de la matrice A.

2. La formule de produit est à connaître :

$$\forall A,B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(A.B) = \det A.\det B = \det(B.A).$$

Sa démonstration n'est pas facile et est hors de notre programme. Le prof. ne peut s'empêcher de l'écrire et vous n'êtes pas forcés de lire (contrairement au reste de ce texte) :

On se base sur la caractérisation abstraite du déterminant.

Démonstration. On fixe une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\det(A) \neq 0$ et on considère l'application ψ définie sur $(\mathbb{R}^n)^n$ par

$$\forall (V_1,\dots,V_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \psi(V_1,\dots,V_n) = \frac{1}{\det(A)} \det(A.(V_1|\dots|V_n))$$

On a (calcul matriciel par colonnes)

$$\forall (V_1,\dots,V_n) \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \psi(V_1,\dots,V_n) = \frac{1}{\det(A)} \det(A.V_1|\dots|A.V_n)$$

et ceci nous permet de montrer que ψ est une forme n-multilinéaire alternée égale à 1 en la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par unicité, c'est le déterminant et

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \det(B) = \psi(B) = \frac{1}{\det(A)} \det(A.B)$$

Ceci donne la formule désirée lorsque $\det(A) \neq 0$.

Lorsque $\det(A) = 0$, la matrice A n'est pas inversible, la matrice $A.B$ non plus et

$$\det(A.B) = 0 = \det A.\det B.$$

$\square$

Exercice 13.— On considère une matrice réelle carrée Q de taille $n\times n$ vérifiant $Q^\top.Q = I_n$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\det(Q)$?

Correction Ex.–13

Un point important de cet exercice est que le déterminant d'une matrice carrée et celui de sa transposée sont égaux. A retenir :

$$\boxed{\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\, \det(M) = \det(M^\top)}$$

En appliquant la fonction déterminant aux deux termes de l'égalité $I_n = Q^\top.Q$ et par la formule du produit, on a donc

$$\det(I_n) = \det(Q^\top.Q) = \det(Q^\top).\det(Q) = \det(Q)^2$$

Donc $\det(Q)^2 = 1$ et $\det(Q) = \pm 1$.

3 Noyau, image, théorème du rang

Exercice 14.— Qu'est-ce que le noyau, l'espace image d'une matrice ? Qu'est-ce que le théorème du rang ?

Correction Ex.–14

Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice (réelle) comportant n lignes, p colonnes. On définit le produit $A.x$ où x est un vecteur de $\mathbb{R}^p$ en considérant x comme une matrice colonne de p lignes. Le résultat [3] est une matrice colonne de n lignes que l'on identifie à un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit alors :

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^p | A.x = 0\} \text{ et } \operatorname{Im} A = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists x \in \mathbb{R}^p, A.x = 0\} = \{A.x | x \in \mathbb{R}^p\}$$

- L'ensemble $\operatorname{Ker} A$ est une partie de $\mathbb{R}^p$. C'est en fait un s.e.v. de $\mathbb{R}^p$
- L'ensemble $\operatorname{Im} A$ est une partie de $\mathbb{R}^p$. C'est en fait un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$

En tant que s.e.v. d'espaces vectoriels numériques (de type $\mathbb{R}^d$), $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ ont une dimension (au sens de dimension de sev) et on dispose du théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = p$$

Pour se souvenir de cela, on peut penser à ce qui se passe lors de l'échelonnement, c'est à dire l'application fidèle de l'algorithme du pivot de GAUSS, d'une matrice. La résolution de l'équation $A.x = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^p$ (qui est un système linéaire de n équations scalaires à p inconnues scalaires [4]) est équivalente à la résolution de l'équation $A'.x = 0$ où A' est un amtrice $n \times p$ *échelonnées*.

Suivant la position des pivots dans la matrice A', on distingue deux catégories d'inconnues scalaires dans un système échelonné : les inconnues « portant les pivots » (dites aussi parfois « inconnues primaires » et les inconnues « se transformant en paramètres » (dites aussi parfois « inconnues secondaires ».

- Le nombre de pivots (*i.e.* d'inconnues primaires) est le *rang* de la matrice A. C'est aussi la dimension de $\operatorname{Im} A$, l'espace image de A ;
- le nombre de paramètress (*i.e.* d'inconnues secondaire) est la dimension de $\operatorname{Ker} A' = \operatorname{Ker} A$; la somme de ces deux dimensions est donc le nombre total d'inconnues.

3. L'espace de départ de A est $\mathbb{R}$, l'espace d'arrivée de A est R^n
4. Les scalaires sont les nombres réels dans notre discussion, on peut aussi considérer le cas de scalaires complexes

Exercice 15.—

Déterminer dimension, base et système d'équations cartésiennes du noyau et de l'image de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

Correction Ex.–15

Pour montrer la méthode utilisée, on ne traite que la matrice C. On résout le système linéaire correspondant à la recherche du noyau : c'est à dire l'équation $C.x = 0$ d'inconnue $x = \big(x_1, x_2, x_3, x_4\big)$.

Par la méthode du pivot de GAUSS, **qu'on applique systématiquement**, ce système est équivalent aux systèmes représentttés par les matrice suivantes (on ne fait que des opérations légales de pivot de GAUSS)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow 2L_4 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & +1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & +1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & +1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le dernier système linéaire homogène obtenu est échelonné : il est de rang 3, la dimension du noyau de C est donc 1. C'est un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Ker} C$ comportnant nu nombre minimal d'équations.

On note la présence dans ce système de trois pivots portés par les variables x_1, x_2, x_3 (variables primaires) et une variable « paramètre » : $x_4 = t$ et on a (remontée) :

$$C.x = 0 \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcr} 2x_1 & = & -2t \\ -x_2 & = & 2t \\ x_3 & = & t \\ x_4 & = & t \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & -t \\ x_2 & = & -2t \\ x_3 & = & t \\ x_4 & = & t \end{array} \right.$$

Il reste $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et donc $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est base de $\operatorname{Ker} f$ (c'est une famille ne comportant qu'un vecteur).

Concernant $\operatorname{Im} C = \operatorname{Vect} \langle C_1, C_2, C_3, C_4 \rangle$ où on a noté C_k la colonne numéro k de C. On constate (résolution du système précédente) que (C_1, C_2, C_3, C_4) est liée (non unicité de solutions pour le système devant tester la liberté de cette famille) alors que (C_1, C_2, C_3) est libre (on résout toujours le même système en imposant ce coup ci $x_4 = 0$, ce qui force $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.) La famille (C_1, C_2, C_3) est une base de $\operatorname{Im} C$.

Le raisonnement à faire pour trouver un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Im} C$ est un peu plus subtil, on doit reprendre la résolution du système $C.x = y$ qui après échelonnement donnera (4e équation) une condition de compatiblité sur les composantes de y équivalente à l'existence d'une solution x. On ajoute une colonne (second membre) à la matrice et on lui fait subitr le même échelonnement que précédemment sans toucher à cette dernière colonne qui ne fait que « suivre la musique ».

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 & y_1 \\ 4 & 3 & -1 & 11 & y_2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & y_3 \\ 3 & 3 & -2 & 11 & y_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow 2L_4 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 & y_1 \\ 0 & -1 & +1 & -3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & y_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2y_4 - 3y_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 & y_1 \\ 0 & -1 & +1 & -3 & -2y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2y_1 - y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3y_1 + 2y_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 & y_1 \\ 0 & -1 & +1 & -3 & -2y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2y_1 - y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \end{pmatrix}$$

Et donc $y \in \operatorname{Im} C \Leftrightarrow -y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 = 0$.

Exercice 16.— Montrer que pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$$

En utilisant cette propriété, donner deux matrices A et B–non nulles–vérifiant $A.B = 0$.

Correction Ex.–16

On traite chaque implication séparément :

implique Si $A.B = 0$. Soit $y \in \operatorname{Im} B$. Il existe alors x tel que $y = B.x$ et on a $A.y = A.B.x = 0.x = 0$ et $y \in \operatorname{Ker} A$. On a donc

$$\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$$

$\Leftarrow$ Si $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$ alors, pour $B_1, \dots, B_p$ les colonnes de B qui sont dans $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$, on a $A.B_k = 0$. Comme

$$A.B = (A.B_1 | \dots | A.B_p)$$

, il vient $A.B = 0$.

4 Inversibilité.

Exercice 17.— Rappeler la définition du fait qu'une matrice est inversible. Qu'est ce que l'inverse ?

Correction Ex.–17

La *définition* de l'inversibilité d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ est

$$A \text{ est inversible si (et seulement si –de définition–)} \exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), A.B = B.A = I_n$$

Dans ce cas, la matrice B vérifiant $A.B = B.A = I_n$ est unique, on l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.

L'inversibilité est caractérisée par différentes propriétés plus aisément vérifiables suivant les contextes : pour une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les assertions suivantes sont équivalentes

(i) A est inversible ;

(ii) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$;

(iii) $\operatorname{rg}(A) = n$;

(iv) $\operatorname{Im} A = R^n$;

(v) Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A.B = I_n$ (dans ce cas $A^{-1} = B$)

(vi) Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B.A = I_n$ (dans ce cas $A^{-1} = B$)

(iv) $\det(A) \neq 0$. (si $\det(A) \neq 0$, il existe une formule donnat l'inverse de A en fonction du déterminant de A et de la comatrice de A (c'est à dire la matrice des « mineurs » de A.

Exercice 18.— Donner une formule pour l'inverse d'une matrice 2×2 (avec condition d'inversibilité portant sur les quatre coefficients de cette matrice)

Correction Ex.–18

Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ alors A inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Il suffit de voir que :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc).I_2$$

Exercice 19.— Démontrer que si S est une matrice symétrique *inversible* alors son inverse est-elle aussi inversible.

Correction Ex.–19

Soit S une matrice symétrique inversible, T son inverse. On a $S.T = I_n$ et donc, en transposant $T^\top.S^\top = I_n$ et donc, comme S est symétrique, $T^\top.S = I_n$. On en déduit que $T^\top$ est inverse de S, par unicité de l'inverse, que $T^\top = T$, *i.e.* T est symétrique.

Exercice 20.— Résoudre le système suivant[5] :

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Correction Ex.–20 Le système linéaire en question a pour matrice A. Si on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, la résolution du système proposé est équivalente à la résolution de l'équation $A.X = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$, avec un second membre « générique ». Pour résoudre ce système, on va appliquer un pivot de GAUSS sur une forme « épurée du système représenté sous forme de tableau. A gauche du tableau, on place la matrice du système : chaque colonne correspond à l'une des inconnues (x, y, z) et l'on place à la ligne k, colonne d'une inconnue le coefficient de cette inconnue dans l'équation numéro k. Dans la partie droite du tableau (à droite de la barre verticale, chaque colonne correspond à un paramètre (a, b ou c) et on place à la ligne k,

5. quelles inconnues ? quels paramètres ?

colonne d'un paramèter le coefficient de ce paramètre dans l'équation numéro k. Ainsi le système proposé se code sous forme de tableau en

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

On peut maintenant appliquer le pivot de GAUSS à ces tableaux (on oublie la ligne de labels inconnues/-paramètres pour alléger) pour échelonner le système et on finira la résolution en appliquant la « remontée de JORDAN » (qu'on expliquera au passage). Les systèmes codés par les tableaux suivants sont donc tous équivalents :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow 3L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

A ce stade la première partie (échelonnement) du pivot de GAUSS est achevée, on voit que le système (et donc la matrice A) est de rang 3 et donc la matrice A est inversible.

En intermédiaire avant la remontée, on fait en sorte que les pivots du sysème vaillent 1 :

$$\cdots \xrightarrow[L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3]{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$$

On peut maintenant effectuer la remontée de JORDAN : il s'agit en partant de la dernière colonne d'inconnues, d'effectuer des opérations d'élimination des coefficients *au-dessus de chaque pivot*. Les systèmes suivants sont équivalents (et donc équivalents au système initial) :

$$\cdots \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{4}{3} & +\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|ccc} x & y & z & a & b & c \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

On a remis les labels inconnues/paramètres dans cette dernière matrice pour traduire comment s'écrit ce système en mode traditionnel :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & = & a & +b & -c \\ & y & & = & -\frac{1}{3}a & +\frac{1}{3}b & \\ & & z & = & -\frac{1}{3}a & -\frac{2}{3}b & +c \end{array} \right.$$

Comme A^1 est caractérisée comme étant la matrice B (si elle existe) vérifiant $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3, A.X = Y \Leftrightarrow X = B.Y$, on a, par identification :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 21.— Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} ;$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Correction Ex.–21

NB : A la machine, en Python/Numpy, après importation `import numpy as np`, l'inversion d'une matrice Numpy `A` se fait par `np.linalg.inv(A)`.

Réponses obtenues à la machine pour vérification (les résultats sont arrondis à deux décimales, il faut faire votre inversion via un pivot de GAUSS :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & -0.11 \\ 0.22 & -0.11 & 0.22 \\ -0.11 & 0.22 & 0.22 \end{pmatrix}$$

C est non inversible.

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -0.75 \\ -1 & -2 & 1.25 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} -0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 0.33 & -0.5 & 0.16 & 0 \\ -0.33 & 0 & 0.33 & 0 \\ 1 & 0.5 & -0.5 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.33 \end{pmatrix}$$

Exercice 22.—

On suppose que A est une matrice carrée (de taille $n \times n$) vérifiant $A^3 - 3A^2 + A - 2I_n = 0$. Montrer que A est inversible et donner une formule calculant son inverse comme combinaison linéaire de diverses puissances de A.

Correction Ex.–22

Comme (réagencement de l'inentité)

$$A.\frac{1}{2}(A^2 - 3A + I_n) = I_n$$

on en déduit que A est inversible avec $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + I_n)$.

Exercice 23.— On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2,A et I. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}.

Correction Ex.–23

On calcule A^2 explicitement :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 20 \\ -5 & 9 & 10 \\ -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

et on se rend compte (on peut rechercher des coefficients inconnus x, y pour que $A^2 + y.A + x.I_2 = 0$) que

$$A^2 - 5A + 6I_3 = 0$$

c'est à dire $A.\frac{1}{6}(5I_2 - A) = I_2$. On en déduit que A est inversible avec $A^{-1} = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_2.$;;;

Exercice 24.— On considère la matrice carrée $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer K^2.
2. En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Montrer que $M^2 = -\left(a^2 + b^2\right) I + 2aM$.
4. En déduire que si a et b ne sont pas tous les deux nuls, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI + dK$.
5. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Correction Ex.–24

1. On a $K^2 = -I_4$.
2. Donc K est inversible et $K^{-1} = -K$.
3. Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Par le binôme de NEWTON, valable pour ces matrices car $I.K = K.I$, on a

$$M^2 = a^2I^2 + 2abI.K + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) = -\left(a^2 + b^2\right) I + 2aM$$

4. En déduire que si a et b ne sont pas tous les deux nuls, on a $a^2 + b^2 \neq 0$ et

$$(2aM - M^2) = (a^2 + b^2)I, \ i.e. \ M.\frac{1}{a^2 + b^2}(aI - M) = I$$

On en déduit que M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(2aI - M) = \frac{1}{a^2 + b^2}(2aI - (aI + bK))\frac{1}{a^2 + b^2}(aI - bK)$$

5. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}I + K$$

Comme $\sqrt{2}^2 + 1^2 = 3 \neq 0$, la matrice A est inversible avec

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(\sqrt{2}I - K)$$

5 Calculs de puissances.

Exercice 25.—On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

6 En `Python/Numpy`.

Reprise d'exercices numériques précédents en utilisant les capacités de calcul numériques du combo Python/Numpy.

Utiliser le notebook `initiation.ipynb`