Notes de cours 02

Calcul matriciel : Eléments propres et diagonalisibilité

Table des matières

1 Problème de la diagonalisation et intérêt

Lorsque l'on veut calculer– ce dont nous allons avoir beaucoup besoin dans les applications du prochain chapitre– les puissances successives d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la difficulté fondamentale pour trouver une formule provient de l'enchevêtrement des coefficients des matrices lors du produit.

La situtation est beaucoup plus simple si la matrice A est diagonale car alors, si

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, A = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Le sujet de ce chapitre est la possibilité (ou pas), de transformer via un « changement de base » une matrice A en une matrice diagonale D :

$$A = P.D.P^{-1}$$

de sorte que (par une récurrence à écrire)

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P.D^k.P^{-1}$$

2 Eléments propres d'une matrice carrée

Procédons à l'analyse du problème : Etant donnée une matrice A,déterminer une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale et une matrice P inversible telles que

$$A = P.D.P^{-1}$$

ou de façons équivalentes

$$A.P = P.D \text{ ou } D = P^{-1}.A.P$$

L'équation centrale nous intéresse le plus car elle ne comporte pas d'inversion de P. Si P a pour colonnes $(C_1, \dots, C_n)$, *i.e.*

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_n \end{array} \right)$$

alors

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A.C_1 & \dots & A.C_n \end{array} \right) \text{ et } P.D = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1.C_1 & \dots & \lambda_n.C_n \end{array} \right)$$

On doit donc avoir :

- pour chacune des colonnes C_j de P, l'existence d'un nombre λ_j tel que $A.C_j = \lambda_k.C_j$
- La famille $(C_1, \dots, C_n)$ doit être une base de $\mathbb{R}^n$, de sorte que la matrice P soit inversible.

Réciproquement, en synthèse, s'il existe une base $\mathscr{C} = (C_1, \dots, C_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque vecteur C_k soit colinéaire au vecteur $A.C_k$ alors il existe une matrice $P = (C_1 | \dots, C_n)$ inversible, une matrice D diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que

$$D = P^{-1}.A.P$$

Effectuer cette transformation sur la matrice A, c'est *diagonaliser* A. La (une) matrice P inversible réalisant cette transformation est dite *matrice diagonalisant* A. La base de $\mathbb{K}^n$ formée avec les colonnes d'une telle matrice P est dite *base diagonalisant* A ou *base de diagonalisation de* A.

On met tout ceci en définitions !

Définition 1. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (pour*[1] *$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

1. *Un* vecteur propre *X de A est un vecteur* non nul *tel que $A.X$ est colinéaire à X. Le coefficient de proportionnalité $\lambda \in \mathbb{K}$ vérfiiant $A.X = \lambda.X$, s'appelle la* valeur propre *de A associée au vecteur propre X.*
2. *Réciproquement, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe un vecteur X* non nul *vérifiant $A.X = \lambda.X$ s'appelle une* valeur propre *de A et X est* un *vecteur propre associé.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note (souvent)*
   $$m_A(\lambda) = \dim Ker\,(A - \lambda.I_n)$$
   la multiplicité géométrique *de λ en tant*[2] *que valeur propre de A et*
   $$E_\lambda(A) = \{X \in \mathbb{K}^n | A.X = \lambda.X\} = Ker\,(A - \lambda.I_n)$$
4. *On appelle* spectre *de A l'ensemble des valeurs propres de A, que l'on note SpecA :*
   $$Spec(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} | m_\lambda(A) \neq 0\}$$

1. si la matrice est à coeffcients réels, on a le choix de considérer ses valeurs propres réelles ou alors ses valeurs propres complexes.
2. NB :si $m_A(\lambda)$ vaut 0, λ n'est pas valeur propre de A !

La dernière formule mérite explications : On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $X \in \mathbb{K}^n$:

$$A.X = \lambda.X \Leftrightarrow (A - \lambda.I_n).X = 0 \Leftrightarrow X \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda.I_n)$$

Donc (λ est v.p.de A) ssi ($\mathrm{Ker}\,(A - \lambda.I_n) \neq \{0\}$) ssi ($m_A(\lambda) = \dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda.I_n) > 0$).
On définit :

Définition 2. — *L'espace $E_\lambda(A) = Ker A - \lambda.I_n)$ s'appelle, lorsqu'il n'est pas réduit à $\{0\}$ le* sous-espace propre *de A associé à λ. Il est composé du vecteur nul et de tous les $\overrightarrow{v.p.}$associés à λ.*

— *La fonction χ_A : $\lambda \mapsto \det(A - \lambda.I_n)$ est polynomiale de degré n : c'est le* polynôme caractéristique *de la matrice A.*

En résumé, on a donc la caractérisation :

Proposition 3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$: les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *λ est v.p.de A, i.e. $\lambda \in Spec(A)$;*

(ii) *$A - \lambda.I_n$ n'est pas inversible ;*

(iii) *$rg(A - \lambda.I_n) \leq n - 1$;*

(iv) $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.

Trouver les valeurs propres d'une matrice revient à trouver les racines de la fonction polynomiale χ_A de degré n. Celle-ci possède au plus n racines dans $\mathbb{K}$ (exactement n racines dans $\mathbb{C}$), en les comptant avec multiplicité.

La multiplicité d'une racine λ de χ_A, *i.e.* d'un élement du spectre complexe s'appelle la *multiplicité algébrique* de λ en tant que valeur propre complexe de A. On peut la noter $n_A(\lambda)$. On a toujours (et ce n'est pas si facile que ça à montrer)

$$m_A(\lambda) \leq n_A(\lambda)$$

et

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)} n_A(\lambda) = n.$$

Exercice 1.—Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A, donner leur multiplicité algébrique ; déterminer une base de chaque sous-espace propre, donner leur multiplicité géométrique de chaque valeur propre.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ composée de vecteurs propres de A.
3. Diagonaliser A et donner une formule pour A^k où k est un entier naturel quelconque.

Exercice 2.—Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a (calcul du polynôme caractéristique) :

$$\det(A - \lambda.I_2) \quad = \quad (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

.

Comme $\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \Leftrightarrow \det(A-\lambda.I_2)=0$, on a en résolvant cette équation trinôme ($\Delta = 9-4=5$)

$$\mathrm{Spec}(A) = \left\{\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}), \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})\right\}$$

Chacune des valeurs propres est de multiplicité algébrique 1 (multiplicité en tant que racine du trinôme)

Calcul des espaces propres :

— Pour $\lambda = \lambda_+ = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. On note $\alpha = \sqrt{5}$. On a $\alpha^2 = 5$ et $\lambda = \frac{1}{2}(3+\alpha)$. (On comprendra le pourquoi de cette astuce de notation lors du calcul du 2e espace propre. Si cela vous gêne, remplacez partout α par $\sqrt{5}$ dans le calcul suivant.)

Un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ est dans l'espace propre $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda.I_2)$ associé à λ si et seulement si (passage des inconnues du même côté droit des équations, échange des deux équations) :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & \frac{1}{2}(3+\alpha).x \\ x & +2y & = & \frac{1}{2}(3+\alpha).y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} x & +\frac{1}{2}(1-\alpha)y & = & 0 \\ -\frac{1}{2}(1+\alpha).x & +y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ce qui équivaut à (Gauss avec $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}(1+\alpha)L_1$:

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & \frac{1}{2}(3+\alpha).x \\ x & +2y & = & \frac{1}{2}(3+\alpha).y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcl} x & +\frac{1}{2}(1-\alpha)y & = & 0 \\ & +(1+\frac{1}{2}(1+\alpha)\frac{1}{2}(1-\alpha))y & = & 0 \end{array}\right.$$

Le coefficient en facteur de y dans la deuxième équation vaut $1+\frac{1}{4}(1-\alpha^2)=0$ car $\alpha^2=5$. La deuxième équation est donc $0=0$ et le système est en fait de rang 1. (c´est normal ! vu que λ est valeur propre, on dit trouver des solutions non nulles à ce système ! ! !)

On a donc

$$X \in E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda.I_2) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{2}(1-\alpha)t \\ y & = & t \end{array}\right.$$

et donc en remplaçant α par $+\sqrt{5}$,

$$E_{\lambda_+} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

— Pour la valeur propre $\lambda_- = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$, on voit qu´il s´agit exactement du même calcul mais en prenant $\alpha = -\sqrt{5}$, qui vérifie aussi $\alpha^2=5$. On a donc

$$E_{\lambda_-} = \mathrm{Vect}\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Les espaces propres sont chacun de dimension 1, chacune des valeurs propres est de multiplicité géométrique 1.

1. Posons la matrice

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (X_-|X_+)$$

Comme $A.X_- = \lambda_-.X_-$ et $A.X_- = \lambda_+.X_+$, alors

$$A.P = \left(\lambda_-.X_-|\lambda_+.X_+\right) = P.\begin{pmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{pmatrix} = P.D$$

Comme $\det(P) = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -\sqrt{5} \neq 0$, la matrice P est inversible avec

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ +1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

On doit donc avoir, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = P.D^k.P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_-^k & 0 \\ 0 & \lambda_+^k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ +1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

A ce stade, on peut effectuer le calcul de ce triple produit..on est sûr de se planter mais on recommence...

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_-^k \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & -\lambda_+^k \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ \lambda_-^k & \lambda_+^k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \\ +1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} +\lambda_-^k \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) - \lambda_+^k \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & -\lambda_-^k + \lambda_+^k \\ -\lambda_-^k + \lambda_+^k & -\lambda_-^k \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) + \lambda_+^k \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{pmatrix}$$

On peut tout de même faire une remarque de bon sens : vu que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, il est clair que A^k est une matrice dont tous les coefficients sont entiers ! La présence de ces $\sqrt{5}$ dans la formule donnant A^k peut sembler inquiétante...

Cependant, il faut avoir en tête qu´après simplification, interviennent dans cette formule des combinaisons linéaires à coefficient rationnels de d´une part $\frac{1}{\sqrt{5}}(-\lambda_-^k + \lambda_+^k)$ et d´autre part $\lambda_-^k + \lambda_+^k$

Comme (binôme de NEWTON) :

$$\begin{aligned} \lambda_+^k &= \frac{1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} 3^{k-\ell}.\sqrt{5}^{\ell} \\ \lambda_-^k &= \frac{1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} 3^{k-\ell}.(-1)^{\ell}\sqrt{5}^{\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_-^k + \lambda_+^k &= \frac{2}{2^k} \sum_{\ell=0, \ell \text{ pair}}^{k} 3^{k-\ell}.\sqrt{5}^{\ell} \\ -\lambda_-^k + \lambda_+^k &= \frac{2}{2^k} \sum_{\ell=0, \ell \text{ impair}}^{k} 3^{k-\ell}.\sqrt{5}^{\ell} \end{aligned}$$

Lorsque ℓ est pair, $\sqrt{5}^{\ell} = 5^{\ell/2}$ est un entier et lorsque ℓ est impair, $\sqrt{5}^{\ell} = \sqrt{5}.5^{(\ell-1)/2}$ où $5^{(\ell-1)/2}$ est un entier. Donc les coefficients trouvés pour A^k sont en fait au moins rationnels (les $\sqrt{5}$ se simplifient tous).

Exercice 3.—Même exercice avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4.—Même exercice avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. On pourra tenter de diagonaliser entant que matrice réelle (est-ce possible ?) puis en tant que matrice complexe.

Exercice 5.—Même exercice avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.—Même exercice avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7.—Même exercice avec
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Quelle leçon en tirer quand aux valeurs propres d'une matrice triangulaire ?

Exercices plus théoriques

Exercice 8.—
1. Démontrer que deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres, avec multioplictés identiques.
2. En déduire, en cas de diagonalisibilité de A le lien entre valeurs propres de A et éléments diagonaux de D, en y comprenant les questions de multiplicités.

Exercice 9.—Démontrer (dans le cas où la matrice est diagonalisable) que le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicté algébrique.

Et dans le cas non diagonalisable ?

Exercice 10.—Démontrer (dans le cas où la matrice est diagonalisable) que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicté algébrique.

Et dans le cas non diagonalisable ?

Exercice 11.—Transposition.
1. Démontrer qu'une matrice A a même valeurs propres que sa transposée $A^\top$
2. Montrer que pour chaque $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, sa multiplicité algébrique (ou géométrique) en tant que valeur propre de A et la même que sa multiplicité algébrique (ou géométrique) en tant que valeur propre de $A^\top$.
3. Montrer que A diagonalisable $\Rightarrow A^\top$ diagonalisable.
4. Vérifier sur des exemples que les espaces propres de A et $A^\top$ sont distincts.

Exercice 12.—Inversion.
1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Spec}(A)$.

On suppose A inversible.

2. Montrer que les valeurs propres de A^{-1} sont les inverses de celles de A, avec multiplicités correspondantes.

3 Critères de diagonalisibilité

On a vu sur des exemples que toutes les matrices ne sont pas diagonalisables. Il peut être utile de disposer de critères permettant de garantir à l'avance (ou plutôt en cours de calcul) que la matrice à l'étude est diagonalisable.

Le critère fondamental est le suivant (il sera démontré en MG1, *cf.* explication après énoncé) :

Théorème 4. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si la somme des multiplicités géométriques des valeurs propres de A sur $\mathbb{K}$ vaut n alors A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$. La réciproque est vraie. En formule :*

$$\exists D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \textit{diagonale}\ , \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), D = P^{-1}.D.P$$

si et seulement si

$$\sum_{\lambda \in Spec(\mathbb{K})} m_A(\lambda) = n$$

Démonstration. (Esquisse ou plutôt explication) L'implication directe est claire car dans ce cas la multiplicité géométrique est exactement le nombre de fois où la valeur propre λ est répétée sur la diagonale de D.

L'implication réciproque est plus subtile. En supposant que

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\mathbb{K})} m_A(\lambda) = n,$$

on construit, pour chaque v.p. $\lambda \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(A)$ une base $\mathscr{B}_A(\lambda)$ de $E_A(\lambda)$ le sous-espace propre (de $\mathbb{K}^n$) associé. Cette base comporte $m_A(\lambda) = \dim E_A(\lambda)$ éléments.

On montre (et il y a là un petit miracle, un vrai calcul) que la concaténation $\mathscr{B} = \mathscr{B}_A(\lambda_1)\#\ldots\#\mathscr{B}_A(\lambda_k)$ de ces familles libres de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ donne une famille libre. Comme elle comporte n vecteurs (c'est l'hypothèse), c'est une base de $\mathbb{K}^n$ et la matrice formée de ces vecteurs de $\mathbb{K}^n$ en colonnes diagonalise A (on a trouvé une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A, *i.e.* une base diagonalisant A).

□

Exercice 13.—
1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles distinctes alors A est diagonalisable.
2. La matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 2 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (n-1) & \ldots & \ldots & (n-1) & 0 \\ n & \ldots & \ldots & \ldots & n \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

4 Polynomes annulateurs

Proposition 5. *Soit $P = \sum_{k=0}^{d} p_k.X^k$ un polynôme. On suppose que la matrice A vérifie $P(A) = \sum_{k=0}^{d} p_k.A^k = 0$. Toute valeur propre de A est racine de P.*

Démonstration. Exercice ! ! !

□

Exercice 14.—Soit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer J^n, en déduire les valeurs propres complexes possibles de J. Montrer que chacunde ces nombres est effectivement valeurs propres puis que J est diagonalisable.

Exercice 15.—Soit $p_0, \dots, p_{n-1}$ des nombres. $P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} p_k.X^k$ et

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & p_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P annule C_P.

Indication:On peut calculer assez facilement, pour e_1, le premier vecteur de la base canonique, $C_P.e_1, \dots, C_P^{n-1}.e_1$, $C_P^n.e_1$ et constater que

$$P(C_P).e_1 = C_P^n.e_1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k.C_P^k.e_1 = 0$$

On utilisera en suite le fait que C_P et $P(C_P)$ commutent pour calculer $P(C_P).e_\ell$ pour $\ell \in \{2, \dots, n\}$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de C_P.