

## Oscillateurs et ondes mécaniques

### AAV n°9 : être capable de déterminer les modes propres de $N$ oscillateurs couplés et de passer au continu pour déterminer l'équation de propagation de l'onde

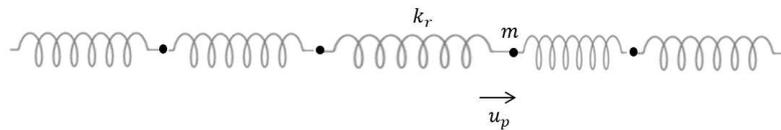
**Consignes :** Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fautive en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fautive en devoir.

## 1 Les savoir-faire

### Savoir établir l'équation du mouvement de $N$ oscillateurs couplés

#### Exercice 1 : $N$ oscillateurs couplés

Nous considérons  $N$  masses  $m$  identiques reliées par des ressorts identiques de constantes de raideur  $k$  et de longueur  $a$  au repos. Nous appelons  $u_p$  le déplacement de la masse  $p$  par rapport à sa position d'équilibre. Physiquement, ce modèle décrit la propagation d'une onde sonore dans un solide.



1. Représenter les vecteurs forces qui s'appliquent sur la  $p$ -ième masse dans le cas où  $u_p$  est plus grand que  $u_{p-1}$  et  $u_{p+1}$ .
2. Montrer que l'équation du mouvement de la  $p$ -ième masse a pour expression  $\ddot{u}_p = -2\omega_0^2 u_p + \omega_0^2(u_{p+1} + u_{p-1})$  et déterminer l'expression de  $\omega_0$ .

### Savoir établir la relation de dispersion des modes normaux d'une chaîne de $N$ oscillateurs couplés

#### Exercice 2 : $N$ oscillateurs couplés

Nous cherchons les fréquences des modes normaux de la chaîne d'oscillateurs étudiée dans le savoir-faire précédent. Nous allons utiliser la notation complexe.

Un mode normal est caractérisé par le fait que toutes les masses oscillent à la même fréquence  $\omega$  mais avec une amplitude différente. Nous cherchons une solution de la forme  $u_p(t) = Ae^{ikx_p} \cos(\omega t)$  avec  $x_p = pa$  où  $a$  est l'écart entre les masses au repos et  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la fonction sinusoïdale qui passe par toutes les masses.

1. Injecter la forme suggérée pour  $u_p$  dans l'équation du mouvement de la  $p$ -ième masse pour obtenir la relation de dispersion de la chaîne d'oscillateurs couplés. Montrer que cette relation de dispersion s'écrit sous la forme  $\omega = \omega_m \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$ . En déduire

l'expression de  $\omega_m$ .

2. Montrer que si le déplacement des masses respectent des conditions aux limites cycliques qui s'écrivent  $u_{N+1} = u_0$  alors les valeurs de  $k$  sont quantifiés. En déduire les valeurs de  $\lambda$  permises ont pour expression  $\lambda = \frac{(N+1)a}{n}$  où  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ .
3. En déduire l'expression de la fréquence  $\omega_n$  des modes normaux.

## Savoir établir l'équation de propagation d'une onde à partir du modèle microscopique en passant au continu

### Exercice 3 : N oscillateurs couplés

Reprendre l'équation du mouvement de la  $p$ -ième masse de l'exercice 1. On augmente maintenant le nombre  $N$  de telle sorte que la longueur totale  $L_0 = Na$  reste constante. La distance entre les masses devient suffisamment faible pour que nous puissions poser  $u_p(t) = u(x = pa, t) = u(x, t)$  où  $u(x, t)$  est une fonction de classe  $C^2$ .

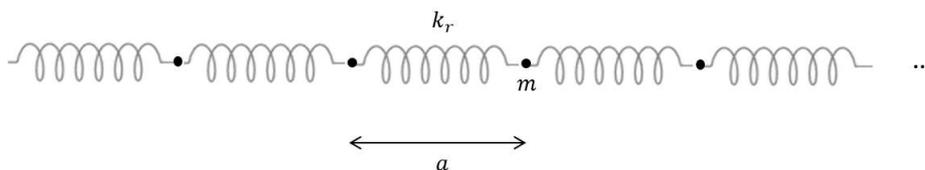
1. Montrer que l'équation de la  $p$ -ième masse donne une équation de d'Alembert dans le cas  $a \ll \lambda$  en faisant un développement de Taylor à l'ordre 2 de  $u_{p+1}$  et  $u_{p-1}$ .
2. Montrer que la solution générale de l'équation de propagation est de la forme  $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ . En déduire l'expression de la célérité des ondes sonores.
3. Dans l'expérience d'élongation d'une barre, on définit le module de Young  $E$  du matériau par la relation  $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0}$  où  $L_0$  est la longueur initiale de la barre et  $S$  sa section. Exprimer  $k$  de la barre en fonction de  $E$  et de la géométrie de la barre. En déduire l'expression de la célérité des ondes sonores en fonction de  $E$  et de la masse volumique  $\rho$ . On rappelle que  $\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$  dans un montage avec des ressorts en série.

## 2 La mise en œuvre

### Exercice 4 : Étude de la porosité d'un béton par propagation d'ondes sonore

Nous cherchons à étudier dans ce problème la propagation des ondes dans un milieu solide pour ensuite étudier la porosité d'un béton.

On considère une barre de section  $S$  et de longueur au repos  $L_0$ . On modélise cette barre par  $N$  masses qui représentent les atomes couplés par  $N$  ressorts qui représentent la liaison chimique entre les atomes. Chaque masse est séparée d'une distance  $a$ .

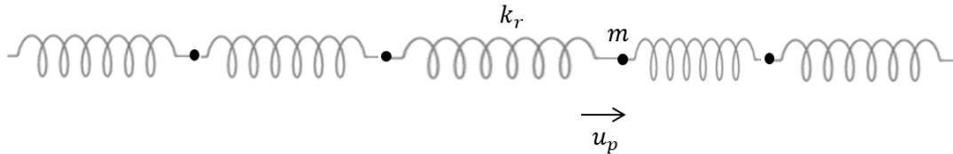


Dans tout le problème on note  $k$  la constante de raideur de la barre et  $k_r$  la constante de raideur d'un ressort.

On allonge la barre de longueur  $L_0$  au repos d'une longueur  $\Delta L$ .

1. Rappeler le lien entre l'intensité de la force exercée sur la barre, la constante de raideur  $k$  de la barre et son élongation dans l'hypothèse où la barre obéit à la loi des ressorts.
2. Dans l'expérience d'élongation d'une barre, on définit le module de Young  $E$  du matériau par la relation  $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L_0}$ . Exprimer  $k$  en fonction de  $E$  et de la géométrie de la barre.
3. On rappelle que l'inverse des constantes de raideur s'additionne pour des ressorts placés en série. Montrer que  $k_r = \frac{NES}{L_0}$ .

Nous perturbons maintenant la barre à une extrémité pour qu'une onde sonore se propage dans la barre. Nous appelons  $u_p$  le déplacement de la masse  $p$  par rapport à sa position d'équilibre.



4. Établir l'équation du mouvement de la  $p$ -ième masse (faire un schéma avec les vecteurs forces et le déplacement des masses adjacentes à la  $p$ -ième masse dans le cas  $u_{p+1} > u_p$  et  $u_{p-1} < u_p$ ).
5. On augmente maintenant le nombre  $N$  de telle sorte que la longueur totale  $L_0 = Na$  reste constante. La distance entre les masses devient suffisamment faible pour que nous puissions poser  $u_p(t) = u(x = pa, t) = u(x, t)$ . Montrer que l'équation de la  $p$ -ième masse donne une équation de d'Alembert dans le cas  $a \ll \lambda$ .
6. En déduire que la vitesse de propagation d'une onde sonore dans la barre a pour expression  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  en utilisant l'expression de  $k_r$  de la question 3). Que représente  $\rho$ ?
7. Injecter une onde de la forme  $u(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 2\pi ft\right)$  dans l'équation de D'Alembert où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $f$  la fréquence de l'onde. Quelle est la relation entre  $\lambda$ ,  $f$  et  $v$ ?
8. Calculer la vitesse d'une onde sonore se propageant dans une poutre en béton de porosité nulle de volume  $V_{tot}$  et de masse  $m_0$  et de masse volumique  $\rho_0 = 2200 \text{ kg m}^{-3}$  et de module d'Young 30 GPa.

En faisant un test sur une poutre en béton de volume  $V_{tot}$  destinée à un immeuble, on trouve une vitesse de propagation de l'onde sonore de  $4200 \text{ m s}^{-1}$ . On note  $m_1$  la masse de cette poutre et  $\rho_1$  sa masse volumique.

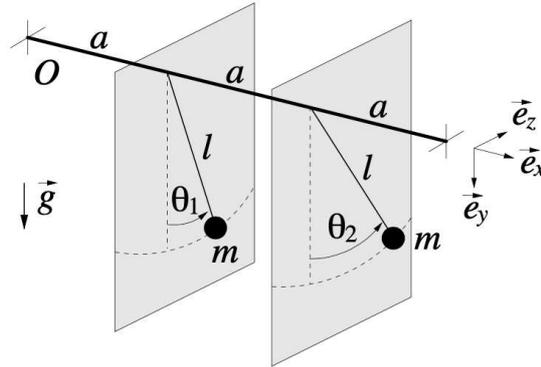
9. Montrer que la porosité définie par  $p = \frac{V_{pores}}{V_{tot}}$ , où  $V_{pores}$  représente le volume des pores dans le béton, a pour expression  $p = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}$ .
10. En déduire la valeur de  $p$  pour cette poutre en faisant l'hypothèse que  $E$  n'est pas impactée par la porosité.

### Exercice 5 : Chaîne de pendules couplés

Un câble de torsion, inextensible, de longueur  $3a$ , d'extension radiale et de masse négligeables, est fixé rigidement par ses extrémités à un support immobile.

Deux pendules  $(m, l)$  identiques sont soudés sur le câble, aux abscisses  $x_1 = a$  et  $x_2 = 2a$  (voir figure). Chaque pendule est constitué d'une masse  $m$  quasi-ponctuelle fixée à l'extrémité d'une tige de longueur  $l$  et de masse négligeable.

La tension du câble est telle qu'il reste rectiligne (selon  $\vec{e}_x$ ). Le vecteur unitaire  $\vec{e}_y$  est dirigé selon l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$ .



Le mouvement des pendules s'effectue, chacun, dans un plan vertical ( $\vec{e}_y, \vec{e}_z$ ), perpendiculaire au câble. Nous notons  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ ) l'angle que forme le premier (resp. second) pendule avec la verticale. Ces angles algébriques sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

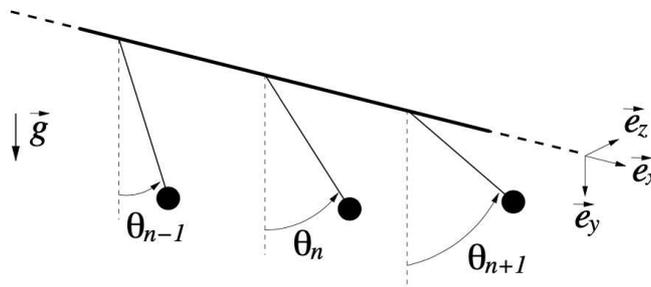
Au repos,  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , et le câble n'est soumis à aucune torsion. Lorsque les sections, délimitant une portion de câble de longueur  $a$ , tournent d'un angle de torsion relatif  $\Delta\theta$  cette portion est alors soumise à un couple, parallèle à l'axe du câble. Sa norme s'exprime par le produit  $C|\Delta\theta|$ , où  $C$  est la constante de raideur de torsion propre à la portion de câble. Enfin, nous négligeons tout phénomène dissipatif.

1. Établir les équations différentielles couplées régissant la dynamique du système. On fera apparaître deux pulsations caractéristiques  $\omega_g = \sqrt{\frac{g}{l}}$  et  $\omega_C = \sqrt{\frac{C}{ml^2}}$ .

Nous introduisons les variables  $\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$  et  $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$ .

2. Établir l'expression des équations différentielle vérifiées par  $\theta_+$  et  $\theta_-$  et en déduire les expressions des fréquences angulaires des modes propres dont on donnera une interprétation physique

Nous considérons maintenant une chaîne constituée de  $N$  pendules ( $m, l$ ) identiques. Le nième pendule oscille dans le plan  $x_n = na$  et son paramètre angulaire est noté  $\theta_n$  (voir figure suivante). Le cadre général de l'étude reste inchangé et nous rappelons que nous restons dans l'approximation des petits angles.



3. Établir l'équation régissant le mouvement du nième pendule ( $1 < n < N$ ).
4. L'état de torsion du câble est maintenant décrit continûment par une fonction  $\theta(x, t)$  telle que  $\theta_n(t) = \theta(x = na, t)$ . Nous nous plaçons dans une situation de déformation telle que le développement de cette fonction, dans le passage de l'abscisse  $na$  à l'abscisse  $na \pm a$ ,

peut être limité au second ordre relativement au pas  $a$ . Établir alors que, dans cette limite du milieu continu, la fonction  $\theta$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

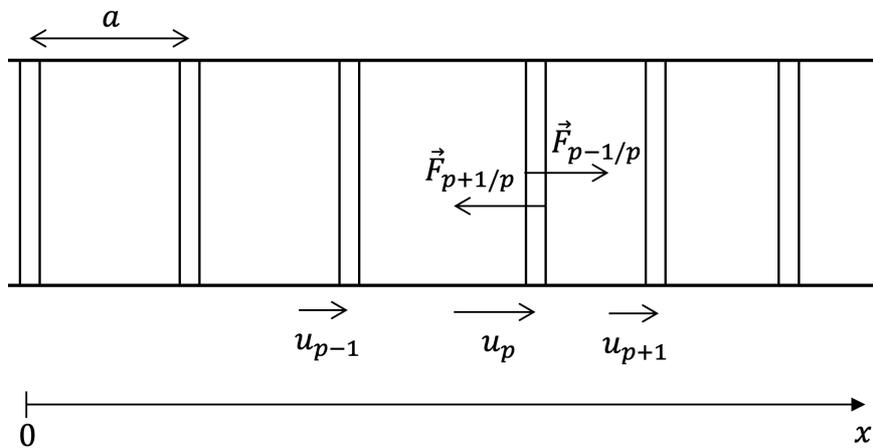
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \omega_0^2 \theta = 0$$

où  $c_0$  et  $\omega_0$  sont des constantes que l'on exprimera.

### Exercice 6 : Onde sonore dans un gaz

On étudie dans ce problème  $N$  pistons adiabatique d'une masse  $m$ . Les pistons sont séparés d'une distance  $a$  dans un cylindre aux parois adiabatique de section  $S$ . Une quantité de masse  $m$  de gaz occupe l'espace entre chaque piston. Le gaz est considéré parfait et nous notons  $P_0$  la pression du gaz au repos. Les pistons peuvent se déplacer sans frottement.

Nous perturbons maintenant un piston à une extrémité pour qu'une onde se propage dans le cylindre. Nous appelons  $u_p$  le déplacement du piston  $p$  par rapport à sa position d'équilibre.



Le déplacement de chaque piston est suffisamment faible pour occasionner une transformation réversible du gaz.

Nous commençons par établir un résultat sur les transformations adiabatiques.

1. Rappeler le lien entre la pression  $P$  et le volume  $V$  lors d'une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.
2. Montrer qu'une petite variation de volume  $\delta V \ll V$  du gaz entraîne une petite variation de pression  $\delta P$  donnée par  $\delta P = -\gamma \frac{P}{V} \delta V$ .

La force qui s'exerce sur un piston est la force pressante exercée par le gaz de chaque côté d'un piston.

3. Montrer que l'équation du mouvement du  $p$ -ième piston (nous considérons dans le schéma le cas  $u_p > u_{p+1}$  et  $u_p > u_{p-1}$ ) a pour expression  $m\ddot{u}_p = -S(P_0 + \delta P_{p+1}) + S(P_0 + \delta P_{p-1})$  où  $\delta P$  est la variation algébrique de pression dans le compartiment  $p + 1$  ou  $p - 1$ .
4. Montrer que l'équation précédente s'écrit  $m\ddot{u}_p = -\gamma \frac{P_0}{V_0} S^2 (u_p - u_{p+1}) + \gamma \frac{P_0}{V_0} S^2 (u_{p-1} - u_p)$  pour des transformations adiabatiques réversibles.
5. On augmente maintenant le nombre  $N$  de pistons de telle sorte que la longueur totale  $L_0 = Na$  du cylindre reste constante. La distance entre les pistons devient suffisamment faible pour que nous puissions poser  $u_p(t) = u(x = pa, t) = u(x, t)$  et que le développement de cette fonction, dans le passage de l'abscisse  $pa$  à l'abscisse  $pa \pm a$ , peut être limité au second ordre relativement au pas  $a$ . Montrer alors que l'équation du  $p$ -ième piston donne une équation de d'Alembert et en déduire que la vitesse des ondes sonores a pour expression  $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ .