Oscillateurs et ondes mécaniques

AAV n°8 : être capable de déterminer les modes propres de deux oscillateurs couplés

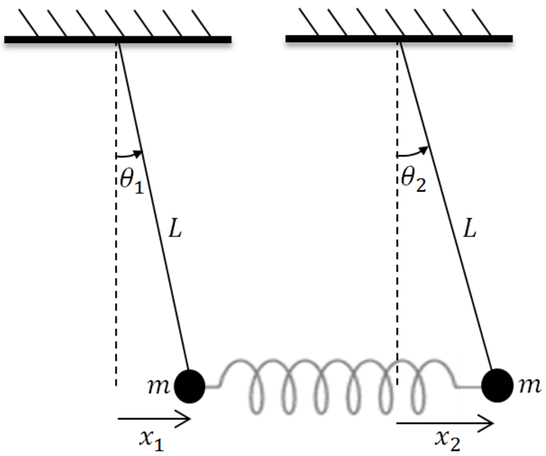
Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir déterminer les modes normaux de deux oscillateurs couplés

Exercice 1 : Deux pendules couplés

Nous considérons le système de pendules couplés suivant :



1. Faire un schéma des forces qui s'exercent sur le système {masse 1} dans le cas où $x_2 > x_1$.
2. Montrer à l'aide du principe fondamental de la dynamique projeté sur les deux axes que l'équation différentielle du mouvement de x_1 dans le cas des petits angles a pour expression $m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{L}x_1 + k(x_2 - x_1)$.
3. Établir de même l'équation différentielle du mouvement de x_2 pour les petits angles.
4. Montrer que l'expression de l'énergie mécanique instantanée du système {masse 1 + masse 2} a pour expression

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2\right) + \left(mg\frac{x_1^2}{2L} + mg\frac{x_2^2}{2L}\right) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2\right\} = 0$$

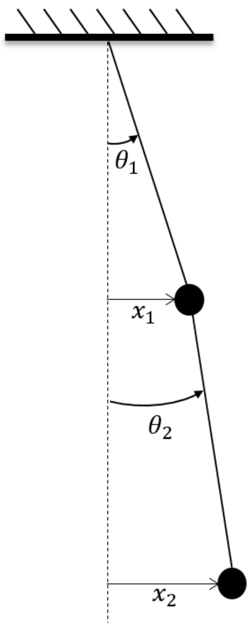
   Interpréter chaque terme.
5. Établir les équations différentielles du mouvement du mode symétrique donné par $q_S = \frac{x_1+x_2}{2}$ et du mode antisymétrique $q_A = \frac{x_2-x_1}{2}$.

6. Résoudre les équations différentielles du mouvement du mode symétrique et du mode antisymétrique.
7. En déduire les expressions de x_1 et x_2 dans le cas général.
8. Déterminer les expressions de x_1 et x_2 pour les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t=0) = 0 \\ \dot{x}_1(t=0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(t=0) = A_0 \\ \dot{x}_2(t=0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Pendule double

Nous étudions dans cet exercice un pendule double constitué de deux pendules simples de masses m et de longueur L. Nous étudions ce pendule double uniquement aux petits angles.



1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, montrer que les équations différentielles du mouvement de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ pour les petits angles ont pour expression $\ddot{x}_1 = -3\omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_2$ et $\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \omega_0^2 x_1$ et déterminer l'expression de ω_0.
2. On cherche les modes propres d'oscillation, les deux masses oscillent donc à la même fréquence et nous posons $x_1(t) = C_1 \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = C_2 \cos(\omega t)$. Injecter les solutions dans les équations différentielles du mouvement pour déterminer les fréquences angulaires des modes normaux en utilisant la méthode générale exposée en cours.
3. Établir l'expression du rapport de l'amplitude de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ pour chaque mode. Commenter les expressions obtenues.

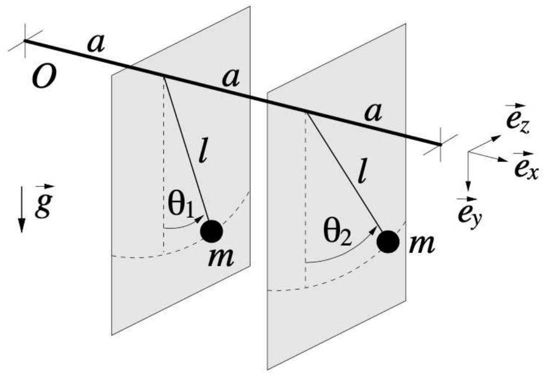
2 La mise en œuvre pour maîtriser l'apprentissage

Exercice 3 : Pendules couplés

Un câble de torsion, inextensible, de longueur $3a$, d'extension radiale et de masse négligeables, est fixé rigidement par ses extrémités à un support immobile.

Deux pendules (m, l) identiques sont soudés sur le câble, aux abscisses $x_1 = a$ et $x_2 = 2a$ (voir figure). Chaque pendule est constitué d'une masse m quasi-ponctuelle fixée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable.

La tension du câble est telle qu'il reste rectiligne (selon $\vec{e}_x$). Le vecteur unitaire $\vec{e}_y$ est dirigé selon l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$.



Le mouvement des pendules s'effectue, chacun, dans un plan vertical $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$, perpendiculaire au câble. Nous notons θ_1 (resp. θ_2) l'angle que forme le premier (resp. second) pendule avec la verticale. Ces angles algébriques sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

Au repos, $\theta_1 = \theta_2 = 0$, et le câble n'est soumis à aucune torsion. Lorsque les sections, délimitant une portion de câble de longueur a, tournent d'un angle de torsion relatif $\Delta\theta$ cette portion est alors soumise à un couple, parallèle à l'axe du câble. Sa norme s'exprime par le produit $C|\Delta\theta|$, où C est la constante de raideur de torsion propre à la portion de câble. Enfin, nous négligeons tout phénomène dissipatif.

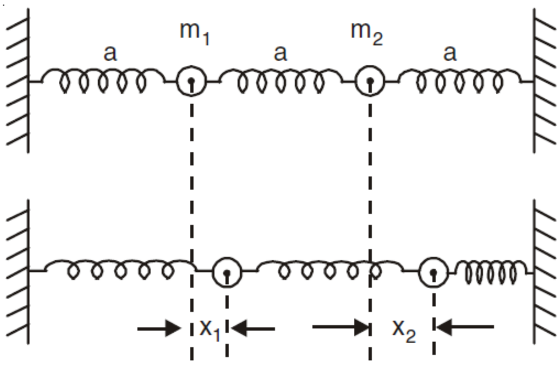
1. Pour un tel système, en pratique, préciser dans quelle mesure il devient légitime de négliger les phénomènes dissipatifs.
2. Établir les équations différentielles couplées régissant la dynamique du système. On fera apparaître deux pulsations caractéristiques $\omega_g = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\omega_C = \sqrt{\frac{C}{ml^2}}$ dont on donnera une interprétation physique.

Nous introduisons les variables $\theta_+ = \theta_1 + \theta_2$ et $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$.

3. Établir l'expression des équations différentielle vérifiées par θ_+ et θ_-.
4. Préciser l'intérêt de ce changement de variables.
5. Décrire le mouvement des deux pendules correspondant à chacun des deux états particuliers $(\theta_+(t); \theta_-(t) = 0)$ et $(\theta_+(t) = 0; \theta_-(t))$, appelés modes propres.
6. Exprimer les pulsations correspondantes, appelées pulsations propres et notées $\omega_{1,1}$ et $\omega_{1,-1}$, en fonction de ω_g et ω_C.
7. Pour un mode propre, justifier que les deux pendules oscillent à la même pulsation.
8. La constante de raideur de torsion C dépend du module de torsion d'élasticité G du matériau (en Pa), du rayon R du câble et de sa longueur a. Donner qualitativement la forme de sa dépendance avec ces paramètres.

Exercice 4 : Deux masses couplés

Nous étudions dans cet exercice deux masses couplées par des ressorts. On note a la longueur au repos du ressort et k la constante de raideur du ressort.



1. Établir les équations différentielles du mouvement de $x_1(t)$ et $x_2(t)$.
2. Chercher les fréquences angulaires des modes normaux en posant $x_1(t) = C_1 \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = C_2 \cos(\omega t)$.
3. Établir l'expression du rapport de l'amplitude de $x_1(t)$ et de $x_2(t)$ pour chaque mode. Commenter les expressions obtenues.
4. Chercher les coordonnées normales dans le cas $m_1 = m_2$.
5. Établir les expressions de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les CIs suivantes dans le cas $m_1 = m_2$: $x_1(t = 0) = A_0$, $\dot{x}_1(t = 0) = 0$, $x_2(t = 0) = 0$ et $\dot{x}_2(t = 0) = 0$.