Oscillateurs et ondes mécaniques

AAV n°7 : être capable d'étudier la résonance d'un système physique simple

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

---

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir déterminer l'amplitude et la phase d'un oscillateur forcé en régime permanent

Exercice 1 : Oscillateur forcé

Lors du fonctionnement d'un moteur de machine outil, il existe des vibrations du châssis qui entoure ce moteur. Il est alors nécessaire de prévoir un système de suspension. Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m qui est soumis à une force extérieure $F_0 \cos(\omega t)\widehat{u}_z$ lorsque le moteur est en fonctionnement. La suspension peut-être modélisée par un ressort de raideur k, qui exerce une force de rappel $-kz\widehat{u}_z$, en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement fluide $-\gamma\dot{z}\widehat{u}_z$.

1. Montrer que l'équation différentielle du mouvement du moteur a pour expression $\ddot{z} + \beta\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$ et donner les expressions de β et ω_0.

On s'intéresse maintenant uniquement au régime permanent. En notation complexe, cela revient à dire que nous cherchons des solutions de la forme $\underline{z}(t) = z_0(\omega)e^{i(\omega t - \varphi(\omega))}$ à l'équation du mouvement écrite sous la forme complexe $\frac{d^2\underline{z}(t)}{dt^2} + \beta\frac{d\underline{z}}{dt} + \omega_0^2\underline{z} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$.

2. Injecter la solution proposée dans l'équation complexe du mouvement et identifier les parties réelles et imaginaires pour montrer que l'amplitude a pour expression $z_0(\omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\beta^2\omega^2}}$ et que le déphasage a pour expression $\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$.
3. Chercher la fréquence pour laquelle le dénominateur de z_0 est minimum. En déduire que la fréquence angulaire de résonance en amplitude a pour expression $\omega_m = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$ où Q est le facteur de qualité est donné par $Q = \frac{\omega_0}{\beta}$.
4. Déterminer l'expression de l'amplitude de la vitesse de la masse en régime permanent. Montrer que la résonance en vitesse à lieu à $\omega = \omega_0$.
5. Déterminer l'expression de la vitesse à la résonance.

Savoir étudier le déphasage

Exercice 2 : Variation du déphasage en fonction de la fréquence angulaire

Nous considérons l'oscillateur de l'exercice 1.

1. Déterminer les valeurs prises par le déphasage φ dans les cas de figures suivants :
   - $\omega = 0$
   - $\omega = \omega_0$
   - $\omega >> \omega_0$
2. Déterminer l'expression de $\frac{d\varphi}{d\omega}$. Commentaires.

Savoir étudier la puissance fournie par le terme de forçage

Exercice 3 : Puissance fournie

Nous considérons l'oscillateur du premier exercice.

1. Montrer que la puissance absorbée a pour expression $P = Fv = F_0 v_0 \cos(\omega t)[\cos(\omega t)\sin\varphi - \sin(\omega t)\cos\varphi]$. Déterminer l'expression de $< P >$ la valeur moyenne de la puissance absorbée par l'oscillateur sur une période.
2. Montrer que la puissance absorbée est max pour $\omega = \omega_0$.
3. Déterminer ω_+ et ω_- pour lesquelles la valeur moyenne de la puissance absorbée vaut la moitié de la valeur moyenne de la puissance absorbée à la résonance.
4. Montrer que $\omega_+\omega_- = \omega_0^2$.
5. Montrer que la largeur à mi-hauteur du pic de puissance absorbée vaut β.

Savoir faire un bilan d'énergie instantanée et moyen

Exercice 4 : Bilan d'énergie

Nous considérons l'oscillateur du premier exercice.

1. Faire apparaître la variation temporelle de l'énergie mécanique à partir de l'équation du mouvement étudiée dans le premier savoir-faire.
2. On se place maintenant en régime permanent. A quoi est égale la variation temporelle de la valeur moyenne de l'énergie mécanique ? Commentaires.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Exercice 5 : Microscope à force atomique

Le Microscope à Force Atomique est un palpeur local et ultra-sensible de force. Son principe est le suivant : une pointe fine, métallique ou isolante, se trouve à l'extrémité d'un bras de levier souple qui fait office de ressort. L'autre extrémité de ce bras est fixe. L'extrémité du bras portant la pointe est approchée de la surface, à étudier et interagit avec cette dernière. La force qui s'exerce entre la pointe et la surface provoque, en chaque point, une déflexion du bras, que l'on détermine à partir de la réflexion d'un faisceau laser.

Dans le fonctionnement dit en mode résonant, la pointe est excitée par une force périodique de fréquence proche de la fréquence de résonance du système bras-pointe. L'interaction pointe-surface perturbe le système, ce qui entraîne une variation de l'amplitude de vibration. L'ordre de grandeur de l'amplitude vibratoire peut varier dans de grandes proportions, de quelques dixièmes à quelques dizaines de nanomètres. La mesure de cette amplitude vibratoire lorsque la pointe balaye la surface donne accès à la topographie de la surface étudiée. À l'aide de céramiques piézoélectriques, le déplacement de la sonde au-dessus de la surface s'effectue avec une précision de l'ordre du nanomètre dans les trois directions de l'espace.

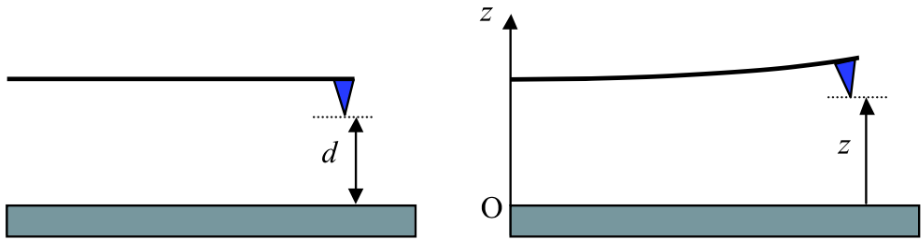

FIGURE 1 – Schéma d'une sonde ; à gauche au repos, à droite en flexion.

On suppose que le mouvement de la pointe s'effectue selon la direction verticale. Sa position est repérée par son altitude $z (z > 0)$ à partir de la surface ; on note d la distance séparant la pointe de la surface lorsque la sonde est à l'équilibre en l'absence de forces externes.

Loin de la surface, la sonde est modélisée par un oscillateur mécanique constitué d'une masse ponctuelle m soumise :

— à une force de rappel élastique $-k(z - d)$ avec $k > 0$,

— à un amortissement représenté par une force de frottement visqueux $-\lambda \dot{z}$, avec $\lambda > 0$,

— à une force d'excitation selon Oz, sinusoïdale, $f_z = f_0 \cos(\omega t)$

1. Écrire l'équation du mouvement régissant le mouvement de cet oscillateur.

Dans la suite, on pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$, $a_m = \frac{Qf_0}{m\omega_0^2}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

2. Déterminer les dimensions ou les unités dans le S.I. de Q, a_m et u.
3. En régime sinusoïdal permanent, la solution est de la forme $z(t) = d + a\cos(\omega t - \varphi)$, avec a un réel positif. Déterminer l'amplitude $a(\omega)$ en fonction de a_m, Q et u en utilisant la notation complexe $\underline{Z} = \underline{z} - d = ae^{i(\omega t - \varphi)}$.
4. Déterminer l'expression de u à la résonance en amplitude.
5. Tracer le graphe de a en fonction de u. Comment évolue le graphe en fonction de Q ?
6. Les valeurs typiques de Q sont de quelques centaines. Montrer alors qu'au voisinage de la résonance $a \simeq \frac{a_m}{\sqrt{1+Q^2(1-u^2)^2}}$. Justifier cette expression au voisinage de la résonance. On pourra poser $u = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon << 1$ et montrer que l'expression précédente et l'expression trouvée à la question 3 sont équivalentes.

Lorsque la sonde est rapprochée de la surface, elle est soumise à une force additionnelle verticale. Essentiellement due aux interactions de Van der Waals, elle est attractive et donnée par $F(z) = -\frac{K}{z^2}$ où K est une constante positive qui dépend de la taille de la pointe et des matériaux en présence.

En effectuant l'hypothèse d'oscillations de faible amplitude, on adopte pour $F(z)$ la forme approchée suivante en faisant un développement de Taylor de $F(z)$ à l'ordre 1 :

$$F = A + B(z - d)$$

7. Écrire l'équation différentielle régissant le mouvement de la pointe.

8. Quel est l'effet du terme A sur les oscillations forcées de la sonde ?
9. Sur quelle caractéristique de l'oscillateur influe le terme B ?

Exercice 6 : Diffusion du rayonnement électromagnétique

La diffusion du rayonnement électromagnétique par la matière peut être décrite à partir du modèle classique étudié dans ce problème. Nous étudions un électron lié élastiquement à son noyau par la force $\vec{F} = -k\vec{r}$ où $\vec{r}$ désigne l'écart du barycentre du nuage électronique par rapport à sa position d'équilibre. Nous tenons compte également de la perte d'énergie de l'électron par rayonnement en considérant que l'électron est soumis à la force de frottement $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. Le champ électrique du champ électromagnétique de l'onde incidente exerce une force $\vec{F} = F_0\cos(\omega t)\widehat{u}_r$ sur l'électron.

L'équation différentielle du mouvement de l'électron est donc $m\ddot{r} + \alpha v + kr = F_0\cos(\omega t)$ où m est la masse de l'électron. Nous nous intéressons au régime permanent.

1. Montrer que l'équation de la dynamique de l'électron est donnée par $\ddot{r} + \beta\dot{r} + \omega_0^2 r = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$. Donner l'expression de β et ω_0.
2. Déterminer l'expression de l'amplitude et du déphasage en fonction de ω en utilisant la notation complexe.
3. Montrer que l'amplitude de la vitesse de l'électron en régime permanent a pour expression $v_0 = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{\omega^2}+\beta^2}}$.
4. Déterminer l'expression de l'amplitude a_0 de l'accélération de l'électron en régime permanent.
5. Bonus : déterminer l'expression de la fréquence angulaire de résonance en accélération.

L'énergie électromagnétique rayonnée par l'électron est proportionnelle au carré de son accélération.

6. On pose $a_0^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 D(\omega)$. Montrer que $D(\omega)$ a pour expression $D(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2}$ où Q est le facteur de qualité.
7. Déterminer l'expression de $D(\omega)$ dans le cas de la diffusion Rayleigh $\omega << \omega_0$.
8. La fréquence angulaire est reliée à la longueur d'onde par la relation $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$. Calculer le rapport énergétique de la contribution à $\lambda_1 = 700\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 450\,\mathrm{nm}$. En déduire une explication de la couleur bleue du ciel.
9. Déterminer l'expression de $D(\omega)$ dans le cas de la diffusion Thomson (régime de diffusion du rayonnement X) $\omega >> \omega_0$.

Exercice 7 : Oscillations sans frottement

Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort de masse négligeable, de longueur au repos l_0 et de raideur k.

1. Quelle est l'expression de la longueur l_e du ressort à l'équilibre ?
2. Une force sinusoïdale excitatrice $F_e = F_0\cos\omega t$, de pulsation ω est appliquée au point M. Le frottement de type fluide est supposé négligeable. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $C = \frac{F_0}{k}$. Établir l'équation différentielle du mouvement de M en posant $X(t)$ l'élongation du ressort par rapport à sa position d'équilibre.
3. En déduire l'expression de $X(t)$ avec les condition initiales $X(t=0) = 0$ et $\dot{X}(t=0) = 0$.

4. Faites apparaitre le produit de deux fonctions sinusoïdale dont on précisera les pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_1 > \omega_2$).
5. Tracer l'allure du graphe de $X(t)$ en fonction de t.
6. On considère maintenant une force de frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ? Observe-t-on toujours des battements en régime permanent ?

Exercice 8 : Étude énergétique d'un oscillateur en régime forcé

Un point matériel M de masse m attaché à un ressort de raideur k et de longueur l_0 au repos glisse sans frottement solide le long d'un axe horizontal. L'origine de l'axe est confondue avec la position au repos du point matériel. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le point M est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$ et à une force excitatrice $\vec{f_e} = F\cos(\omega_0 t)\widehat{u}_x$. On suppose que le régime permanent est atteint.

1. Déterminer l'expression de $v(t)$ et de $x(t)$.
2. Déterminer les expressions des valeurs moyennes $< E_C >$, $< E_P >$ et $< E_M >$ sur une période t_0.
3. Quelle est la relation entre $Q = \frac{m\omega_0}{\gamma}$, $< E_M >$ et le travail W_e de la force excitatrice f_e pendant une période T_0 ?