Oscillateurs et ondes mécaniques

AAV n°6 : être capable d'étudier un système physique modélisé par un oscillateur harmonique libre amorti

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à maitriser

Savoir caractériser et étudier le régime libre d'un oscillateur amorti

Exercice 1 : Oscillateur amorti 1

Nous considérons un système bloc-ressort amorti d'équation $\ddot{X} + 2\kappa\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$. La masse du bloc est de $1\,\mathrm{kg}$. La fréquence angulaire en l'absence de dissipation vaut $4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Cette masse est soumise à force de frottement de type fluide dont la constante de proportionnalité avec la vitesse vaut $10\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$.

1. Quel est le régime d'oscillation de cet oscillateur ?
2. Montrer que la solution générale a pour expression $X = Ae^{-2t} + Be^{-8t}$ où X est l'élongation du ressort. Quelle est la position du bloc quand t tend vers l'infini ?
3. On écarte le bloc de sa position d'équilibre à la position $X_0 > 0$ puis on le lâche avec une vitesse initiale $-v$. Montrer que $X(t)$ a pour expression $X(t) = \frac{8X_0 - v}{6}e^{-2t} + \frac{v - 2X_0}{6}e^{-8t}$.
4. Déterminer le temps t_0 auquel le bloc passe par sa position d'équilibre. Calculer t_0 pour $v = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $X_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$.
5. Tracer qualitativement le graphe de $X(t)$ pour $v = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $X_0 = 0{,}5\,\mathrm{m}$.

Exercice 2 : Oscillateur amorti 2

Une particule de masse $m = 3\,\mathrm{kg}$ se déplace le long d'un axe Ox. Cette particule est soumise à une force d'intensité égale à $12x$ dirigée vers l'origine de l'axe. Cette particule est de plus soumise à une force de frottement dont l'intensité est égale à γ fois la vitesse instantanée de la particule.

1. Déterminer la valeur limite γ_C de γ pour laquelle le mouvement de la particule est le régime critique. En déduire alors que $x(t) = (A + Bt)e^{-2t}$. Déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ de la particule pour t quelconque.
2. On prend maintenant $\gamma = \frac{\gamma_C}{\eta}$ avec $\eta > 1$. Déterminer alors l'expression de l'équation horaire $x(t)$ du mouvement de la particule.
3. La particule est initialement au repos à $x_0 > 0$. Déterminer l'amplitude, la période et la fréquence des oscillations amorties du mouvement de la masse.
4. Donner l'expression du facteur de qualité Q de cet oscillateur et du décrément logarithmique.
5. Déterminer l'expression de la période pour $\kappa << \omega_0$ en fonction de Q.

Savoir faire le bilan d'énergie d'un oscillateur amorti

Exercice 3 : Travail de la force de frottement

Nous considérons un oscillateur amorti d'équation $m\ddot{X} + \beta\dot{X} + kX = 0$.

1. Multiplier l'équation précédente par $\dot{X}$ pour faire apparaitre la variation temporelle de l'énergie mécanique du système et le terme de perte d'énergie mécanique.
2. En déduire que le travail de la force de frottement est égal à la perte d'énergie de la masse m durant le même intervalle de temps dt.

2 La mise en œuvre pour acquérir les apprentissages

Exercice 4 : Oscillateur électrique

Les oscillateurs électriques sont parmi les systèmes oscillants les plus courants. L'analyse de tel système a des similitudes remarquables avec les systèmes mécaniques que nous avons étudiés précédemment. Nous nous intéressons ici uniquement aux oscillations libres d'un oscillateur électrique composé d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L et d'un résistor de résistance R.

Rappelons qu'un condensateur est un composant capable de stocker des charges et l'énergie électrostatique correspondante. Sa capacité est définie par la relation $C = \frac{q}{u_C}$ où u_C est la tension aux bornes du condensateur en convention récepteur et q est la charges portées par les armatures.

Une bobine est un composant qui s'oppose aux variations temporelles du courant (loi de Lenz). Lorsqu'un courant passe dans la bobine, une différence de potentielle donnée, en convention récepteur, par $u_L = L\frac{di}{dt}$ s'établit à ses bornes. L est l'inductance de la bobine.

On pose $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ dans la suite du problème.

L'interrupteur K du montage de la figure 1 est fermé à l'instant $t = 0$. Le condensateur de charge initiale q_0 se décharge dans la bobine et la résistance de valeur réglable.

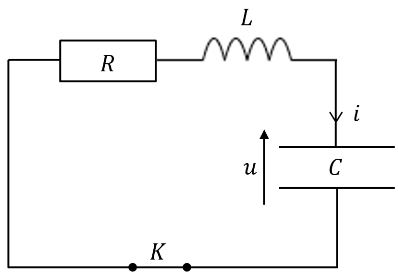

FIGURE 1 – Circuit RLC série.

1. Montrer que l'équation différentielle satisfaite par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur a pour expression $\ddot{u}_C + \frac{\dot{u}_C}{\tau_e} + \omega_0^2 u_C = 0$?
2. Faire un bilan énergétique instantanée à partir de l'équation $L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = 0$. En déduire l'expression de l'énergie stockée dans la bobine, de l'énergie stockée dans le condensateur et de l'énergie dissipée dans la résistance.
3. Trouver l'expression de $u_C(t)$ lorsque $R = 0$ à partir de l'équation du 1).
4. Monter qu'il existe une valeur critique R_C qui permet de passer du régime pseudo-périodique au apériodique. Calculer R_C sachant que $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$ et $C = 0{,}1\,\mu\mathrm{F}$.
5. On suppose que $R = R_C$: Établir alors l'expression de $u_C(t)$. Représenter le graphe $\frac{u_C(t)}{u_0}$ en fonction de t.

Nous considérons maintenant le montage de la figure 2 où une source pure de tension (f.e.m. E) est connectée à l'instant $t = 0$ au groupement série R,L,C. Le condensateur est initialement déchargée.

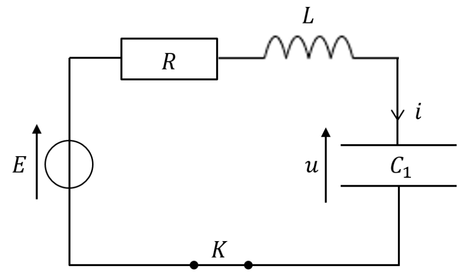

FIGURE 2 – Circuit RLC série.

6. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la tension $u_C(t)$.
7. Écrire la solution $u_C(t)$ de l'équation différentielle dans le cas d'un régime pseudo-périodique.
8. Déterminer l'expression de la pseudo-période.
9. Donner l'expression du décrément logarithmique δ en fonction du facteur de qualité Q. Déterminer la valeur de Q pour $\delta = 0{,}64$.
10. Tracer qualitativement l'évolution de $u_C(t)$.

Exercice 5 : Modélisation "classique" d'un atome

Nous considérons un atome dont le nuage électronique oscille autour du noyau. Ce nuage électronique rayonne un champ électromagnétique et perd ainsi de l'énergie. Nous modélisons cette perte d'énergie par une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse. Nous nommons ω_0 la fréquence angulaire de l'oscillation du nuage électronique autour du noyau. Les ordres de grandeur des paramètres caractéristiques pour un atome sont $\kappa = 10^{-8}\,\mathrm{s}^{-1}$ et $f_0 = 10^{15}\,\mathrm{Hz}$.

1. **Question supplémentaire pour les étudiants de l'U.E. électromagnétisme. Les autres peuvent admettre résultat de cette question.** Établir grâce au théorème de Gauss l'expression de la force électrostatique qui s'exerce entre le noyau et le nuage électronique lorsque le barycentre du nuage électronique et le noyau sont séparés de la distance x (prendre comme surface de Gauss une sphère de rayon x centrée sur le barycentre du nuage électronique). Montrer que cette force a la même forme que la force de rappel d'un ressort avec une constante de raideur équivalente $k = \frac{e\rho}{3\varepsilon_0}$ où e est la charge de l'électron. Calculer l'ordre de grandeur de k. En déduire l'ordre de grandeur de f_0.
2. Calculer la valeur du facteur de qualité d'un atome typique. Quel est le régime libre de cet oscillateur ?
3. En déduire l'expression de l'équation horaire du mouvement du barycentre du nuage électronique.
4. Déterminer l'expression de la pseudo-période. Calculer l'écart relatif de la période $\frac{T-T_0}{T_0}$ pour cet oscillateur.

Exercice 6 : Facteur de qualité d'un oscillateur

On considère un circuit RLC électrique de paramètres $R = 1\,\Omega$, $L = 10\,\mathrm{mH}$ et $C = 1\,\mu\mathrm{F}$ et un oscillateur mécanique de paramètres $\alpha = 0{,}1\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$, $m = 0{,}1\,\mathrm{kg}$ et $k = 10\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

1. Calculer la pulsation propre de l'oscillateur électrique et de l'oscillateur mécanique.
2. Calculer leurs facteurs de qualité Q.

Exercice 7 : Oscillation d'une tige lourde

Une tige de masse m et de longueur D est suspendue à une tige de longueur d dont la masse est négligeable.

1. Montrer que la fréquence angulaire d'oscillation des deux tiges a pour expression :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6g(2d+D)}{3(2d+D)^2+D^2}}$$

2. Montrer que nous obtenons la fréquence angulaire d'oscillation d'un pendule simple dans le cas d'une tige très courte $D << d$.

Nous tenons maintenant compte de la force de frottement $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$.

3. Montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme $\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.
4. Déterminer l'expression de θ dans le cas $Q >> 1$ avec comme conditions initiales $\theta(t = 0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t = 0) = 0$.
5. Déterminer l'expression de la période T à l'ordre 1 en $\frac{1}{Q^2}$ dans le cas d'un amortissement faible $Q >> 1$.

Exercice 8 : Régime critique d'un circuit RLC

On considère un circuit RLC électrique avec une fréquence propre de 100 Hz, qui se relaxe selon un régime critique. La bobine a une inductance de 10 mH et une résistance r variable en fonction de la fréquence selon $r = 2 + 0,0005f^2$.

1. Calculer la valeur de la capacité C.
2. Calculer la valeur de la résistance de la bobine et la résistance R à insérer dans le circuit.

Exercice 9 : Évolution de la charge d'un condensateur

Un circuit électrique est constitué d'un interrupteur, d'un résistor de résistance R, d'un condensateur de capacité C initialement non chargé et d'une bobine d'inductance L, montés en série. Aux bornes de l'ensemble, un générateur délivre une tension E constance. A l'instant initial, l'interrupteur est fermé.

1. Montrer que l'équation différentielle du circuit peut se mettre sous la forme $\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau_e}\frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2 q(t) = \frac{E}{L}$. Exprimer τ_e et ω_0.
2. Donner la solution générale $q(t)$ de l'équation pour $Q > \frac{1}{2}$.
3. Tracer le graphe de $q(t)$ pour $R = 0{,}1\,\Omega$, $L = 100\,\mu\text{H}$ et $C = 1\,\text{mF}$.
4. En déduire l'expression de q lorsque t tend vers l'infini.
5. Quelle est la solution générale $q(t)$ de l'équation pour $Q = \frac{1}{2}$?
6. Quelle est la solution générale $q(t)$ de l'équation pour $Q < \frac{1}{2}$?