Oscillations et ondes mécaniques

AAV n°4 : Mise en équation d'un oscillateur harmonique non amorti

Consignes pour la rédaction

Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

1 Les savoir-faire à maîtriser

Savoir résoudre l'équation de la dynamique d'un oscillateur harmonique

Exercice 1 : Système oscillant

1. Soit un système oscillant dont l'équation de la dynamique a pour expression $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y$ avec ω_0 une constante positive.
   (a) Donner l'expression des solutions de cette équation.
   (b) Les conditions initiales sont $y(t = 0) = A_0$ et $v_y(t = 0) = 0$. En déduire la solution qui respecte ces conditions initiales.
2. Soit un système oscillant dont l'équation de la dynamique a pour expression $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = C$ avec ω_0 une constante positive et C une constante. Donner l'expression des solutions de cette équation.

Savoir établir l'équation du mouvement d'un système bloc-ressort

Exercice 2 : Système bloc-ressort

Nous étudions le mouvement d'un bloc de masse m accroché à un ressort de raideur k pendu verticalement. Le bloc est écarté de sa position d'équilibre de 5 cm puis lâché sans vitesse initiale à $t = 0$. Nous négligeons la masse du ressort devant la masse du bloc. Nous négligeons les frottements. On note M le centre du bloc et O le point d'attache du ressort sur le bâti. On note $y(t)$ la position du bloc à un temps t quelconque ($0y$ est un axe orienté vers le bas), y_{eq} la position du bloc à l'équilibre et y_0 la longueur au repos du ressort

1. Faire un schéma de l'expérience. Représenter les vecteurs forces qui s'appliquent sur le système bloc.
2. Utiliser le principe d'inertie appliqué sur le bloc à l'équilibre pour exprimer mg en fonction de k, y_{eq} et y_0.
3. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au bloc de masse m et montrer que l'équation de la dynamique du mouvement s'écrit $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y - y_{eq})$ où k est la constante de raideur du ressort.
4. Récrire l'équation $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k(y - y_{eq})$ en introduisant la variable élongation du ressort noté Y.
5. Déterminer l'expression de l'équation du mouvement du bloc en tenant compte des conditions initiales.
6. Déterminer l'expression de la période des oscillations.

Savoir établir l'équation du mouvement d'un pendule simple en utilisant le théorème du moment cinétique

Exercice 3 : Le pendule simple

Nous étudions le mouvement d'un pendule simple de longueur L et de masse M aux petits angles.

1. Faire un schéma de l'expérience. Représenter les vecteurs forces qui s'appliquent sur la masse.
2. Établir l'équation différentielle de l'angle $\theta(t)$ que fait le pendule avec la verticale à l'aide du théorème du moment cinétique.
3. Établir l'expression de $\theta(t)$ aux petits angles pour les conditions initiales $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$ positif et $\theta(t=0) = 0$. Donner l'expression de la période du pendule simple.
4. Déterminer l'expression de la vitesse et de l'accélération du pendule.

Savoir établir l'équation du mouvement à partir de l'énergie et savoir établir l'équation de conservation de l'énergie à partir de l'équation du mouvement

Exercice 4 : Système bloc-ressort 2

Nous étudions le mouvement d'un bloc de masse m accroché à un ressort de raideur k qui coulisse horizontalement sans frottement.
On note M le centre du bloc et O le point d'attache du ressort sur le bâti. On note $x(t)$ la position du bloc à un temps t quelconque ($0x$ est un axe orienté vers la droite) et $X(t) = x(t) - x_0$ l'élongation du ressort à un instant t.

1. L'énergie mécanique du système {ressort+bloc} a pour expression $E_M = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kX^2$. Interpréter physiquement chacun de ces deux termes.
2. Les frottements sont négligés. Que nous apprend le théorème de l'énergie mécanique dans ce cas ?
3. Dériver l'équation précédente par rapport au temps et montrer que vous obtenez l'équation différentielle du mouvement du bloc.

Exercice 5 : Système bloc-ressort 3

Nous reprenons le système de l'exercice précédent.

1. L'équation différentielle du mouvement a pour expression $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$. Multiplier par $\dot{x}$ l'équation précédente et montrer que l'équation obtenue redonne l'équation de conservation de l'énergie du système bloc-ressort si on pose que l'énergie potentielle élastique du ressort est nulle lorsque $x = x_0$.

Savoir utiliser une approche énergétique

Exercice 6 : Pendule

Utiliser l'approche énergétique pour montrer que l'expression de la période d'oscillation d'un pendule simple sans faire l'approximation des petits angles peut s'écrire sous la forme $T = 2\sqrt{2}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{g}{L}(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$ où θ_0 est l'angle que fait le pendule avec la verticale à $t = 0$. On pose que l'énergie potentielle de pesanteur du pendule est nulle pour $\theta = 0$.

Exercice 7 : Rebond d'une balle sur un mur

Une balle est suspendue à un mur vertical à l'aide d'un fil. La balle est écartée à l'horizontal puis lâchée sans vitesse initiale. La balle rebondit contre le mur avec un coefficient de restitution égale à $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Combien de collisions ont lieu au minimum avant que l'amplitude des oscillations soit inférieure à $60\,^\circ$?

Savoir utiliser le théorème scalaire du moment cinétique

Exercice 8 : Oscillation d'un cerceau

Sheldon suspend un cerceau de 45 cm de rayon au bout de son doigt et lui donne une poussée afin de le faire osciller selon son plan. La masse du cerceau est de 0,6 kg et son inclinaison maximale par rapport à sa position d'équilibre est de 10°. Les frottements sont négligés.

1. Déterminer l'expression du moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe passant par le doigt de Sheldon. On rappelle que le moment d'inertie d'un cerceau de rayon R par rapport à son axe de symétrie vaut mR^2.
2. Déterminer l'expression de $\theta(t)$ où θ est l'angle que fait le cerceau avec la verticale. Quelle est l'expression de la période d'oscillation du cerceau ?
3. Quelle est la valeur maximale du module de la vitesse du point du cerceau le plus éloigné du doigt de Sheldon ?

Savoir mettre en équation un oscillateur électrique

Exercice 9 : Circuit LC

Un circuit LC série est constitué d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C en série. Le condensateur est initialement chargé avec une charge q_0. L'interrupteur K est fermé à $t = 0$, le condensateur se décharge et un courant circule dans le circuit. En convention récepteur, $u_l = L\frac{di}{dt}$ et $u_c = \frac{q}{C}$.

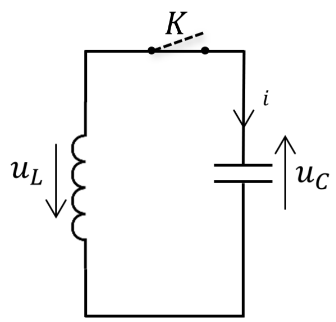


FIGURE 1 – Schéma électrique d'un circuit LC.

1. Déterminer l'expression de l'équation différentielle que doit satisfaire le courant i dans le circuit.
2. Déterminer l'expression du courant.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Exercice 10 : Système bloc-ressort avec une condition initiale particulière

Deux blocs de masses m_1 et m_2 sont suspendus à un ressort de masse négligeable (figure 2). Une fois l'équilibre atteint, le bloc de masse m_2 est retiré et le bloc de masse m_1 se met à osciller. Déterminer l'amplitude et la fréquence des oscillations.

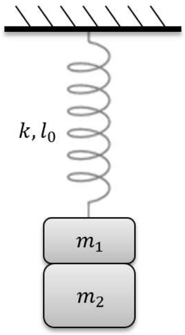


FIGURE 2 – Deux blocs suspendus à un ressort.

Exercice 11 : Un pendule un peu particulier

Un pendule simple fait d'une balle de masse m est suspendu verticalement à l'aide d'un câble rigide de masse négligeable. Le câble est accroché à un ressort de raideur k. Lorsque le pendule est vertical, la longueur du ressort est sa longueur à vide. On néglige les frottements. Le pendule oscille aux petits angles de telle sorte que nous pouvons considérer que le ressort reste horizontale pendant tout le mouvement.

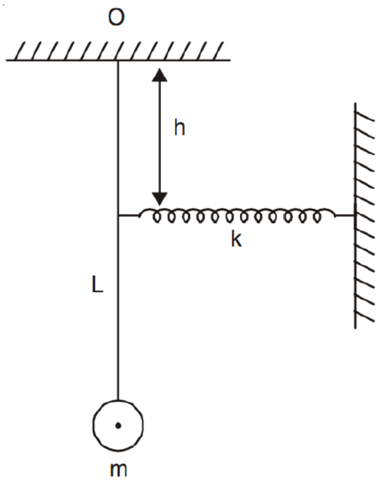
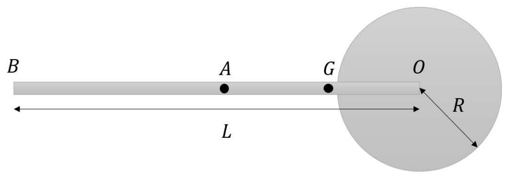


FIGURE 3 – Un pendule soumis à la force de rappel d'un ressort.

1. Déterminer l'expression du moment des forces qui s'appliquent sur le pendule par rapport au point de rotation dans un système de coordonnées polaires.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement du pendule en utilisant le théorème du moment cinétique.
3. Déterminer l'expression de la fréquence d'oscillation du pendule pour les petits angles en fonction des paramètres du problème.

Exercice 12 : Pendule composé

On considère une tige homogène cylindrique de longueur L au bout de laquelle est attaché un disque homogène cylindrique de rayon R.

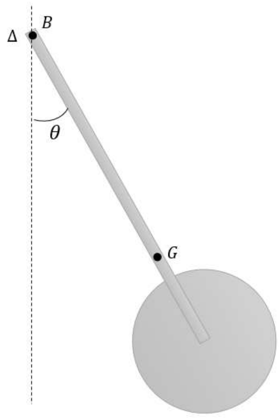


On note O le centre du disque et A le centre de masse de la tige (situé au milieu de la tige). On suppose que la tige et le disque ont la même masse M. L'axe du disque cylindrique est perpendiculaire à la feuille. On rappelle que :

— Le moment d'inertie de la tige de longueur L et de masse M par rapport à un axe perpendiculaire à cette tige et passant par le centre de masse de cette tige est $I_T = \frac{1}{12}ML^2$

— Le moment d'inertie du cylindre de rayon R et de masse M par rapport à l'axe passant par le centre de masse et parallèle à une génératrice du cylindre est $I_C = \frac{1}{2}MR^2$.
Le centre de masse G de l'ensemble disque + tige est au milieu du segment OA.

1. On considère l'axe Δ passant par B et perpendiculaire au plan de la feuille et donc parallèle à l'axe du disque.
   (a) En utilisant le théorème de Huygens, déterminer le moment d'inertie de la tige seule par rapport à Δ en fonction de M et L.
   (b) De la même manière, déterminer le moment d'inertie du disque seul par rapport à Δ en fonction de M, L et R.
   (c) En déduire que le moment d'inertie total de l'ensemble tige+disque par rapport à Δ est $I_\Delta = \frac{4}{3}ML^2 + \frac{1}{2}MR^2$.
2. Cet ensemble tige+disque est utilisé comme pendule. Les frottements sont négligés.



   (a) Déterminer le moment du poids de l'ensemble tige+disque par rapport à Δ.
   (b) En utilisant le théorème du moment cinétique, montrer que l'angle θ vérifie l'équation différentielle :

$$I_\Delta \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2}MgL\sin\theta = 0$$

   (c) En déduire la période du pendule aux petits angles.
3. Multiplier l'équation différentielle précédente par $\dot{\theta}$ pour obtenir l'expression de l'équation de la conservation de l'énergie du pendule. On pose que l'énergie potentielle de pesanteur est nulle pour $\theta = 0$. En déduire l'expression de l'énergie cinétique du pendule.

Exercice 13 : Mesure de la hauteur d'un immeuble à l'aide d'un pendule

Expliquer comment mesurer la hauteur d'un immeuble avec un pendule simple et un appareil de mesure de la période du pendule très précis.

Exercice 14 : Secousse en mécanique

Un solide S, assimilé à un point matériel de masse m, est accroché au plafond par l'intermédiaire d'un ressort R_1, de masse négligeable et de raideur k. Un second ressort R_2, identique au premier, pend sous le solide (figure 4). A l'instant $t = 0$, on tire sur le ressort R_2. On constate que si l'on tire lentement, l'un des ressorts fini par se briser et que si l'on tire rapidement, c'est l'autre ressort qui se brise.

1. Prévoir quel est, dans chacun des cas, le ressort qui se brise.

Notre but est de comprendre plus quantitativement les résultats décrit dans la première partie. L'opérateur applique une force F_{op} à l'extrémité libre de R_2. L'opérateur augmente progressivement l'intensité de la force qu'il exerce. Nous modélisons donc cette force par $F_{op} = m\alpha t$ où α est une constante positive. La tension T de chaque ressort est proportionnelle à son allongement jusqu'à une tension de rupture T_r. Nous avons donc $T = kx$ pour $T < T_r$ où x est l'allongement du ressort par rapport à sa longueur à vide l_0. On pose $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $x_1(t)$ l'allongement du ressort R_1.

2. Que vaut $x_1(t=0)$?
3. Déduire du principe fondamental de la dynamique appliqué au solide S que l'allongement $x_1(t)$ est donnée par :
$$x_1(t) = \frac{mg}{k} + \frac{m\alpha}{k}\left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right)$$
sachant que $\dot{x}_1(t=0) = 0$.
4. En déduire l'évolution temporelle des tensions $T_1(u)$ et $T_2(u)$ avec $u = \omega t$.
5. En déduire une condition sur $\frac{g\omega}{\alpha}$ pour que les courbes se coupent. Tracer $T_1(u)$ et $T_2(u)$ dans ce cas.
6. En déduire que le ressort R_2 peut casser si la tension T_{2i} à la première intersection est supérieure à la tension T_r. En déduire une équation de la forme $T_r = f(\alpha)$ donnant la valeur limite de α respectant cette condition.

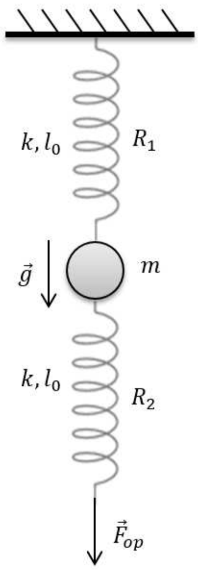


Figure 4 – Bloc suspendu entre deux ressorts.