Oscillateurs et ondes mécaniques

AAV n°1 : Être capable d'étudier l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique - solution

1 AAE et AAS

Savoir étudier un mouvement harmonique

Exercice 1 : Système bloc-ressort 1

Le bloc d'un système bloc-ressort est animé d'un mouvement harmonique d'amplitude $A = 8\,\text{cm}$. La vitesse du bloc au passage de la position centrale est de $0{,}5\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

1. Calculer la valeur de la période de ce mouvement.
2. Calculer la valeur maximale de l'accélération.

Correction de l'exercice 1 :

1. L'énoncé fourni la vitesse scalaire du bloc au passage de la position centrale. Il s'agit de la vitesse max du bloc puisque le bloc commence à ralentir en dehors de cette position jusqu'à atteindre une vitesse nulle aux extrémités de son mouvement. Il faut donc déterminer l'expression de la vitesse scalaire max. Le bloc a un mouvement harmonique, nous posons donc $x = A\cos(\omega t + \varphi)$. La composante de la vitesse a pour expression $v_x = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$, la vitesse scalaire, qui correspond à la norme de la vitesse, a pour expression $v = A\omega\sin(\omega t + \varphi)$. Cette vitesse est max lorsque $\sin(\omega t + \varphi) = 1$ d'où $v_{max} = A\omega$. Nous en déduisons $T = \frac{2\pi A}{v_{max}} = 1\,\text{s}$.
2. La valeur max de l'accélération est donnée par $a_{max} = A\omega^2$. Nous obtenons donc $a_{max} = 3{,}2\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

Savoir utiliser les conditions initiales

Exercice 2 : Système bloc-ressort 2

Une masse de 25 g accrochée à un ressort oscille à la fréquence de 1 Hz avec une amplitude de 5 cm. La masse est en $x = 0$ à $t = 0$ et a une vitesse initiale positive. On exprime la position de la masse au cours du temps sous la forme $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$.

1. Donner les valeurs numériques de A, ω et α.
2. Donner les valeurs de x, $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ à $t = \frac{8}{3}$s.

Correction de l'exercice 2 :

1. Je vous donne directement les valeurs de $A = 5\,\text{cm}$ et $\omega = 6{,}28\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ dans l'énoncé. Il faut par contre calculer la valeur de α en tenant compte des conditions initiales ($x(t = 0) = 0$ et $v(t = 0) > 0$). Nous en déduisons que α doit être solution de $\cos\alpha = 0$ tout en respectant $\sin\alpha < 0$. Nous gardons la valeur de α la plus proche de 0 qui est solution. Nous obtenons donc $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.
2. En remplaçant nous obtenons : $x(t = \frac{8}{3}) = -4{,}3\,\text{cm}$, $v_x(t = \frac{8}{3}) = -16\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$ et $a_x(t = \frac{8}{3}) = 170\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$.

Exercice 3 : Système bloc-ressort 3

Un bloc est animé d'un mouvement harmonique donné par $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = 3\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$. L'objet est à $x = -4\,\text{cm}$ et a une vitesse $v_x = -0{,}6\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ à $t = 2\,\text{s}$. Déterminer les valeurs de $A > 0$ et φ.

Correction de l'exercice 3 :

Je vous impose une condition sur la valeur de A à donner, il est donc préférable de déterminer en premier la valeur de A. On obtient le système suivant en tenant compte des données de l'énoncé :

$$\begin{cases} -4 = A\cos(6 + \varphi) \\ -\frac{0.6}{3} = A\sin(6 + \varphi) \end{cases}$$

Pour déterminer la valeur de A, il faut additionner l'équation (1) mise au carré à l'équation (2) mise au carré et utiliser ensuite $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. On garde ensuite la valeur positive de A, c'est-à-dire $A = 0{,}204\,\text{m}$. Nous en déduisons ensuite $\varphi = -6{,}20\,\text{rad}$.

Savoir déterminer l'amplitude d'un mouvement harmonique

Exercice 4 : Système bloc-ressort 4

Un bloc est animé d'un mouvement harmonique donné, en centimètres, par $x(t) = 2\cos(\omega t) + 3\sin(\omega t)$.

1. Déterminer l'amplitude du mouvement. Conseil : partir de la forme $x(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$ et développer puis identifier.

Correction de l'exercice 4 :

1. L'amplitude se lit sur la forme $C\sin(\omega t+\varphi)$, il faut donc développer le sinus à l'aide de la formule d'addition de trigonométrie et résoudre le système. Nous obtenons $C = 3{,}6\,\text{cm}$.

Savoir étudier le graphe d'un mouvement harmonique

Exercice 5 : Fonction sinusoïdale

La figure 1 montre le graphe (en centimètre et seconde) du mouvement harmonique d'un bloc au cours du temps donné par $x(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$. Déterminer l'amplitude, la phase à l'origine et la fréquence angulaire de ce mouvement.

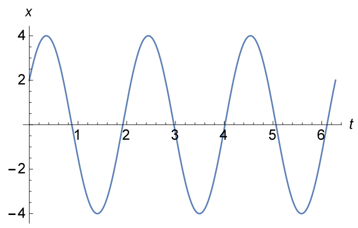

FIGURE 1 – Fonction sinusoïdale

Correction de l'exercice 5 :

Par simple lecture, nous obtenons $A = 4\,\text{cm}$, $T = 2{,}1\,\text{s}$ et $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (ou $\varphi = -\frac{\pi}{3}$) en gardant la valeur la plus proche de zéro.

AAS : Être capable d'étudier l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique

Exercice 6 : Oscillation d'un gratte ciel

Les grattes ciel oscillent les jours de grand vent. Un accéléromètre placé en haut d'un gratte ciel de 350 m mesure une accélération max de 0,35 m s^{-2} tous les 5,8 s.

1. Déterminer l'amplitude de l'oscillation du sommet.
2. Déterminer l'angle max que fait le gratte ciel par rapport à la verticale en supposant que le gratte ciel oscille sans plier.

Correction de l'exercice 6 :

1. Nous faisons l'hypothèse que l'accéléromètre mesure la valeur algébrique de l'accélération, la période d'oscillation du gratte ciel est donc de 5,8 s. L'accélération max a pour expression $a_{max} = A\omega^2$. Nous en déduisons $A = 0{,}3$ m.
2. On pose θ pour l'angle que fait le gratte ciel avec la verticale. Au petit angle $\theta = \frac{A}{H}$ où H est la hauteur du gratte ciel. On trouve $\theta = 8 \times 10^{-4}$ rad.

Exercice 7 : Métronome

Un métronome est un appareil servant à marquer le rythme. Il produit un clic à chaque fois que la tige atteint une des extrémités de son oscillation. Le métronome est réglé pour produire 120 battements par minute et l'inclinaison max de la tige est de 35°. L'angle θ que fait le métronome avec la verticale est donnée par $\theta = \theta_{max}\cos(\omega t)$.

Figure 2 – Exemple de métronome.

1. Calculer la période d'oscillation du métronome.
2. Déterminer la vitesse du point M situé à 10 cm du pivot lorsque le point M passe à la verticale.

Correction de l'exercice 7 :

1. $T = 1$ s.
2. Il faut utiliser les coordonnées polaires. La vitesse a pour expression $v = l\dot{\theta} = -l\omega\theta_{max}\sin(\omega t)$ avec $l = 10$ cm. La vitesse est max lorsque le point M passe à la verticale. Nous obtenons $v_{max} = l\omega\theta_{max} = 38$ cm s^{-1} avec θ_{max} en radians.

2 Entrainement

Exercice 8 : Oscillation d'un bloc sur un piston

On considère un bloc posé sur un piston oscillant verticalement selon un mouvement harmonique d'amplitude 30 cm (figure 3). On augmente la fréquence d'oscillation du piston progressivement. Le bloc cesse d'être en contact avec le piston à partir d'une certaine fréquence angulaire critique ω_c. Calculer la valeur de ω_c.

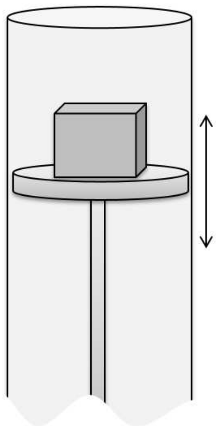

FIGURE 3 – Bloc posé sur un piston oscillant.

Correction de l'exercice 8 :

L'accélération du bloc est égale à l'accélération de la pesanteur lorsque le bloc n'est plus en contact avec le piston. Nous en déduisons $\omega_c = 5{,}7\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Exercice 9 : Oscillation d'un haut-parleur

Un haut-parleur oscille avec une accélération max de $380\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. L'oreille humaine perçoit des sons dans une plage de fréquence comprise entre 16 Hz et 15 kHz.

1. Déterminer l'amplitude de l'oscillation d'un haut-parleur qui émet un son le plus grave audible par l'oreille humaine.
2. Déterminer l'amplitude de l'oscillation d'un haut-parleur qui émet un son le plus aigu audible par l'oreille humaine.

Correction de l'exercice 9 :

1. On utilise $a_{max} = A\omega^2$ d'où $A = 3{,}8\,\mathrm{cm}$
2. $A = 4{,}3 \times 10^{-6}\,\mathrm{cm}$

Exercice 10 : Mouvement de rotation à vitesse constante

1. Un point se déplace sur un cercle de rayon R à vitesse angulaire ω constante. Trouver l'expression de la position $x(t)$ du point où Ox est l'axe horizontale.
2. Calculer $v_x(t)$ puis $a_x(t)$.

Correction de l'exercice 10 :

1. $x = R\cos(\omega t)$
2. $v_x = -R\omega\sin(\omega t)$ et $a_x(t) = -R\omega^2\cos(\omega t)$.