CORRIGÉ TD 6

6.1. a) $E = \frac{1}{2}\hbar\omega\,(X_{cl}^2 + P_{cl}^2)$

b) $E = \hbar\omega\,|\alpha|^2$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha}\alpha^* + \alpha\dot{\alpha}^* = 0 \Rightarrow X_{cl}\dot{X}_{cl} + P_{cl}\dot{P}_{cl} = 0 \quad (1)$$

Par ailleurs : $p = m\dot{x}$ d'où $P_{cl} = \frac{1}{\omega}\dot{X}_{cl}$ (2)

(2) dans (1) donne : $X_{cl} + \frac{1}{\omega}\dot{P}_{cl} = 0$

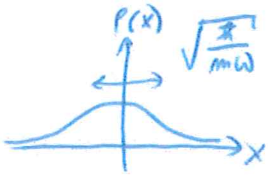
Finalement : $\dot{X}_{cl} = \omega P_{cl}$ et $\dot{P}_{cl} = -\omega X_{cl}$

c) d'où : $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\dot{X}_{cl} + i\dot{P}_{cl}) = -i\omega\alpha$

$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha_0\, e^{-i\omega t}$

d) Energie minimale $\Rightarrow x = 0$ et $v = 0$ $\Rightarrow P(x) = \delta(x)$ (Dirac)
$(E=0)$

Comparaison avec le cas quantique (vu en cours)



$E_{min} = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad P(x) = |\Psi(x)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}$

$\Delta x\,\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

6.2 a) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iP)$; $a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iP)$; $H = \hbar\omega\,(a^+a + \frac{1}{2})$

b) $[a, H] = \hbar\omega\, a \qquad [a^+, H] = -\hbar\omega\, a^+$

$$\frac{d\langle X\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [X,H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}, H]\rangle = \frac{\omega}{i\sqrt{2}}\langle a - a^+\rangle = \omega\langle P\rangle$$

De même : $\frac{d\langle P\rangle}{dt} = -\omega\langle X\rangle$ et $\frac{d\langle a\rangle}{dt} = -i\omega\langle a\rangle$

On retrouve les équations d'évolution de X_{cl}, P_{cl} et $\alpha = \frac{X_{cl} + iP_{cl}}{\sqrt{2}}$

c) $|\alpha\rangle = \sum_{n\geq 0} c_n |n\rangle$; $a|\alpha\rangle = \sum_{n\geq 1} c_n\sqrt{n}\,|n-1\rangle = \sum_{n\geq 0} c_{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle$

$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Rightarrow c_{n+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\, c_n$ d'où $c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\, c_0$

On a donc : $|\alpha\rangle = c_0 \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

Normalisation $\Rightarrow |c_0|^2 \sum_{n\geq 0} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1 \Rightarrow |c_0|^2 = e^{-|\alpha|^2}$

Le choix $c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$ garantit $\langle 0|\alpha\rangle = c_0 > 0$

Finalement : $|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$

d) $|\alpha_0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} \sum \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ à $t=0$

Pour $t>0$: $e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} \sum \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} |n\rangle$ avec $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

$$= e^{-\frac{1}{2}|\alpha_0|^2} \sum \frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{i\omega t}{2}} |n\rangle$$

$$= e^{-\frac{i\omega t}{2}} |\alpha_0 e^{-i\omega t}\rangle$$

état cohérent associé à $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$

e) $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \Rightarrow \langle\alpha|a|\alpha\rangle = \alpha$

$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \langle \frac{a+a^+}{\sqrt{2}}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}}$

$\langle p\rangle = i\sqrt{m\hbar\omega} \frac{\alpha^*-\alpha}{\sqrt{2}}$

$\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t} = |\alpha_0| e^{-i(\omega t+\varphi)}$ (φ est l'argument de α_0)

$\Rightarrow \langle x\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha_0| \cos(\omega t+\varphi)$ et $\langle p\rangle = -\sqrt{2\hbar m\omega} |\alpha_0| \sin(\omega t+\varphi)$

En posant $x_m = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} |\alpha_0|$ on retrouve les trajectoires classiques :

$\langle X\rangle = x_m \cos(\omega t+\varphi)$ et $\langle P\rangle = -m\omega x_m \sin(\omega t+\varphi)$

$\langle X^2\rangle = \frac{1}{2}\langle a^2+a^{+2}+aa^+ +a^+a\rangle$ avec $1+a^+a = aa^+$

d'où $\langle X^2\rangle = \frac{1}{2}[(\alpha+\alpha^*)^2+1]$ et $\langle P^2\rangle = -\frac{1}{2}[(\alpha-\alpha^*)^2-1]$

d'où $\langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 = \frac{1}{2}$ et $\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2 = \frac{1}{2}$

et finalement : $\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} = \frac{\hbar}{2}$ <u>états minimaux</u>

f) Mesure d'énergie $\Rightarrow \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ avec $p_n = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}$

Loi de Poisson de paramètre $|\alpha|^2$

$\langle N\rangle = |\alpha|^2 \qquad \langle H\rangle = \hbar\omega(|\alpha|^2+\frac{1}{2})$

$\langle N^2\rangle = \langle a^+a\,a^+a\rangle = \langle a^+(1+a^+a)a\rangle = \langle a^+a\rangle + \langle a^+a^+aa\rangle = |\alpha|^2+|\alpha|^4$

$\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2 = |\alpha|^2 \;;\; \Delta N = |\alpha|$

$\langle H^2\rangle = (\hbar\omega)^2\langle(a^+a+\frac{1}{2})^2\rangle = (\hbar\omega)^2\langle N^2+N+\frac{1}{4}\rangle$

$= (\hbar\omega)^2\left(|\alpha|^2+|\alpha|^4+|\alpha|^2+\frac{1}{4}\right) = (\hbar\omega)^2\left(|\alpha|^4+2|\alpha|^2+\frac{1}{4}\right)$

$\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2 = (\hbar\omega)^2\left[|\alpha|^4+2|\alpha|^2+\frac{1}{4}-|\alpha|^4-|\alpha|^2-\frac{1}{4}\right] = (\hbar\omega)^2|\alpha|^2$

$\Delta H = \hbar\omega|\alpha| \qquad \frac{\Delta H}{\langle H\rangle} = \frac{|\alpha|}{|\alpha|^2+\frac{1}{2}} \xrightarrow[|\alpha|\gg 1]{} 0$ limite classique

g) Energie mécanique du pendule : $E_M = mg\ell(1-\cos\theta_0) \simeq \frac{mg\ell\theta_0^2}{2}$

On veut $E_M = \hbar\omega(\underbrace{|\alpha|^2+\frac{1}{2}}_{\simeq |\alpha|^2 \gg 1})$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

d'où : $|\alpha| = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{m}\,g^{1/4}\,\ell^{3/4}}{\sqrt{\hbar}}$ $\qquad m = 20\,g \;;\; \ell = 20\,cm \;;\; \theta_0 = \frac{\pi}{10}$

$\Rightarrow |\alpha| \simeq 1{,}6.10^{15} \gg 1$

h) $\mathcal{D}(\alpha) = \exp(\alpha a^+ - \alpha^* a)$

$\mathcal{D}(\alpha)^+ = \exp[-(\alpha a^+ - \alpha^* a)]$ d'où $\mathcal{D}(\alpha)\mathcal{D}^+(\alpha) = I$ (car d'après Glauber $e^A e^{-A} = I$)

Par ailleurs $[a,[a,a^+]] = [a^+,[a,a^+]] = 0$

d'où : $\mathcal{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} e^{-\alpha^* a}$ (Glauber)

$\mathcal{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^+} \underbrace{e^{-\alpha^* a}|0\rangle}_{=|0\rangle} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle$

$a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \Rightarrow (a^+)^n|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$

d'où $\mathcal{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n|n\rangle}{\sqrt{n!}} = |\alpha\rangle$

i) $\alpha a^+ - \alpha^* a = \alpha \dfrac{\hat{X} - i\hat{P}}{\sqrt{2}} - \alpha^* \dfrac{\hat{X}+i\hat{P}}{\sqrt{2}} = i\langle\hat{P}\rangle \hat{X} - i\langle\hat{X}\rangle\hat{P}$

$\hat{X}$ et $\hat{P}$ commutent avec $[\hat{X},\hat{P}]$

$$\underset{\text{Glauber}}{\Longrightarrow} \mathcal{D}(\alpha) = \exp\left(i\langle\hat{P}\rangle\hat{X} - i\langle\hat{X}\rangle\hat{P}\right)$$

$$= \exp\left(i\langle\hat{P}\rangle\hat{X}\right)\exp\left(-i\langle\hat{X}\rangle\hat{P}\right)\exp\Big(-\tfrac{1}{2}\langle\hat{X}\rangle\langle\hat{P}\rangle \underbrace{[\hat{X},\hat{P}]}_{=i}\Big)$$

On réintroduit $\hat{x}$ et $\hat{p}$ « avec dimensions » :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,\hat{x} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,\hat{p} \quad \text{avec } \hat{P}.\hat{X} = \frac{\hat{p}.\hat{x}}{\hbar}$$

$$\mathcal{D}(\alpha) = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle\right)\exp\left(\frac{i\langle\hat{p}\rangle\hat{x}}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{-i\langle\hat{x}\rangle\hat{p}}{\hbar}\right)$$

$$\langle x|\mathcal{D}(\alpha)|0\rangle = e^{-\frac{i}{2\hbar}\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle}\, e^{\frac{i\langle\hat{p}\rangle x}{\hbar}} \sum_{n\geq 0} \frac{\left[-i\langle\hat{x}\rangle\frac{1}{\hbar}(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\right]^n}{n!} \underbrace{\varphi_0(x)}_{\text{fondamental de l'O.H. quantique}}$$

$$= e^{-\frac{i\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle}{2\hbar}}\, e^{\frac{i\langle\hat{p}\rangle x}{\hbar}} \underbrace{\sum_{n\geq 0} \frac{(-\langle\hat{x}\rangle)^n}{n!}\varphi_0^{(n)}(x)}_{=\varphi_0(x-\langle\hat{x}\rangle) \ \text{(Taylor)}}$$

Par ailleurs $\varphi_0(x) = \left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ (cours)

d'où :

$$\langle x|\mathcal{D}(\alpha)|0\rangle = \mathcal{N}\, e^{\frac{i\langle\hat{p}\rangle x}{\hbar}}\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-\langle\hat{x}\rangle)^2}$$

$$\text{avec } \mathcal{N} = e^{-\frac{i\langle\hat{x}\rangle\langle\hat{p}\rangle}{2\hbar}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

Rem : pour montrer que $\exp\left(-\dfrac{i\langle\hat{x}\rangle\hat{p}}{\hbar}\right)\varphi_0(x) = \varphi_0(x-\langle\hat{x}\rangle)$ on aurait aussi pu appliquer le résultat du TD précédent sur le groupe des translations.