Correction TD 3.

1) L'espace est $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(A)} \otimes \mathcal{H}^{(B)}$ et

$$\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}^{(A)} \times \dim \mathcal{H}^{(B)} = 2 \times 2 = 4$$

Une base de $\mathcal{H}$ est : $\{ |g\rangle_A \otimes |g\rangle_B \,,\, |g\rangle_A \otimes |e\rangle_B \,,\, |e\rangle_A \otimes |g\rangle_B \,,\, |e\rangle_A \otimes |e\rangle_B \}$

2)

$$\hat{H}_0 = \hat{H}^{(A)} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}^{(B)}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{H}^{(A)}} \otimes \hat{H}^{(B)}$$

Avec abus de notation $\hat{H}_0 = \hat{H}^{(A)} + \hat{H}^{(B)}$

Si l'on note pour simplifier :

$$\begin{array}{|l} |g\rangle_A \otimes |g\rangle_B \equiv |g,g\rangle \\ |g\rangle_A \otimes |e\rangle_B \equiv |g,e\rangle \\ |e\rangle_A \otimes |g\rangle_B \equiv |e,g\rangle \\ |e\rangle_A \otimes |e\rangle_B \equiv |e,e\rangle \end{array}$$

Alors

$$\hat{H}_0 = (E_g^{(A)} + E_g^{(B)})\,|g,g\rangle\langle g,g| + (E_e^{(A)} + E_g^{(B)})\,|e,g\rangle\langle e,g| + (E_g^{(A)} + E_e^{(B)})\,|g,e\rangle\langle g,e| + (E_e^{(A)} + E_e^{(B)})\,|e,e\rangle\langle e,e|$$

car $\hat{H}^{(i)} |g(e)\rangle_i = E^{(i)}_{g(e)} |g(e)\rangle_i$ $[g(e) \equiv g \text{ ou } e]$

3) On a $\hat{D}_A = (|g\rangle\langle e|) \otimes \mathbb{1}_B = (|g\rangle\langle e|) \otimes (|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$

ou encore $\hat{D}_A |g,g\rangle = 0$, $\hat{D}_A |e,g\rangle = |g,g\rangle$, $\hat{D}_A |g,e\rangle = 0$, $\hat{D}_A |e,e\rangle = |g,e\rangle$

car $\hat{D}_A (|\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B) = (\hat{D}_A |\phi\rangle_A) \otimes |\psi_B\rangle$

· Donc on peut aussi écrire :

$$(1) \qquad \hat{D}_A = |g,g\rangle\langle e,g| + |g,e\rangle\langle e,e|$$

En utilisant la relation de fermeture totale.

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = |g,g\rangle\langle g,g| + |g,e\rangle\langle g,e| + |e,g\rangle\langle e,g| + |e,e\rangle\langle e,e|$$

<u>Rq</u> On peut retrouver (1) directement à partir de

$$\hat{D}_A = (|g\rangle\langle e|)\otimes\mathbb{1}_B = (|g\rangle\langle e|)\otimes(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$$

En "distribuant" le produit tensoriel $\otimes$:

$$\hat{D}_A = \underbrace{(|g\rangle\langle e|)\otimes(|g\rangle\langle g|)}_{\substack{= (|g\rangle\otimes|g\rangle)(\langle e|\otimes\langle g|) \\ = |g,g\rangle\langle e,g|}} + \underbrace{(|g\rangle\langle e|)\otimes(|e\rangle\langle e|)}_{\substack{= (|g\rangle\otimes|e\rangle).(\langle e|\otimes\langle e|) \\ = |g,e\rangle\langle e,e|}}$$

De même on a :

$$\hat{D}_A^\dagger = (|e\rangle\langle g|)\otimes\mathbb{1}_B .$$

Donc : $$D_A^\dagger D_B = (|e\rangle\langle g|)\otimes(|g\rangle\langle e|) = (|e\rangle\otimes|g\rangle)(\langle g|\otimes\langle e|)$$
$$= |e,g\rangle\langle g,e|$$

Et : $$\hat{D}_A\hat{D}_B^\dagger = (|g\rangle\langle e|)\otimes(|e\rangle\langle g|) = |g,e\rangle\langle e,g|$$

· Donc on peut aussi écrire :

(1) $$\hat{D}_A = |g,g\rangle\langle e,g| + |g,e\rangle\langle e,e|$$

En utilisant la relation de fermeture totale.

$$\mathbb{1}_{\mathcal{H}} = |g,g\rangle\langle g,g| + |g,e\rangle\langle g,e| + |e,g\rangle\langle e,g| + |e,e\rangle\langle e,e|$$

<u>Rq</u> On peut retrouver (1) directement à partir de

$$\hat{D}_A = (|g\rangle\langle e|)\otimes \mathbb{1}_B = (|g\rangle\langle e|)\otimes(|g\rangle\langle g| + |e\rangle\langle e|)$$

En "distribuant" le produit tensoriel $\otimes$:

$$\hat{D}_A = \underbrace{(|g\rangle\langle e|)\otimes(|g\rangle\langle g|)}_{\substack{= (|g\rangle\otimes|g\rangle)(\langle e|\otimes\langle g|) \\ = |g,g\rangle\langle e,g|}} + \underbrace{(|g\rangle\langle e|)\otimes(|e\rangle\langle e|)}_{\substack{= (|g\rangle\otimes|e\rangle).(\langle e|\otimes\langle e|) \\ = |g,e\rangle\langle e,e|}}$$

De même on a :

$$\hat{D}_A^{\dagger} = (|e\rangle\langle g|)\otimes \mathbb{1}_B .$$

Donc : $$D_A^{\dagger} D_B = (|e\rangle\langle g|)\otimes(|g\rangle\langle e|) = (|e\rangle\otimes|g\rangle)(\langle g|\otimes\langle e|)$$
$$= |e,g\rangle\langle g,e|$$

Et : $$\hat{D}_A \hat{D}_B^{\dagger} = (|g\rangle\langle e|)\otimes(|e\rangle\langle g|) = |g,e\rangle\langle e,g|$$

$$\det(M - \lambda\, Id) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(E_g^{(A)} + E_e^{(B)} - \lambda\right)\left(E_e^{(A)} + E_g^{(B)} - \lambda\right) - V^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda\left(\underbrace{E_g^{(A)} + E_e^{(B)}}_{\alpha} + \underbrace{E_e^{(A)} + E_g^{(B)}}_{\beta}\right) + \underbrace{\left(E_g^{(A)} + E_e^{(B)}\right)}_{\alpha}\underbrace{\left(E_e^{(A)} + E_g^{(B)}\right)}_{\beta} - V^2 = 0$$

$$\Delta = (\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha\beta - V^2) = (\alpha-\beta)^2 + 4V^2$$

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left[\alpha + \beta \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4V^2}\right]$$

Je ne refais pas les calculs des vecteurs propres dans le cas général (trop long) $\Rightarrow$ plus simple si $\alpha = \beta$ les vecteurs propres sont

$$|d\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|g,e\rangle \pm |e,g\rangle\right)$$

<u>Conclusion</u> les états propres $|g,g\rangle$ et $|e,e\rangle$ sont séparables, les vecteurs propres $|d\pm\rangle$ sont intriqués.

4)

$$\hat{N} = \hat{D}_A^\dagger D_A + \hat{D}_B^\dagger D_B$$

Or $(|g\rangle\langle e|)^\dagger (|g\rangle\langle e|) = |e\rangle\langle e|$

Donc :

$$\hat{N} = (|e\rangle\langle e|) \otimes \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A \otimes (|e\rangle\langle e|)$$

a) $\hat{N}|g,g\rangle = 0$; $\hat{N}|g,e\rangle = |g,e\rangle$; $\hat{N}|e,g\rangle = |e,g\rangle$;

$$\hat{N}|e,e\rangle = 2|e,e\rangle$$

b) $\hat{N}$ est l'observable qui "mesure" le nombre d'atomes dans un état excité, il a donc comme valeurs propres possibles : 0, 1 ou 2.

c) Comme $\hat{N}$ est dégénéré (valeur propre 1) pour les vecteurs propres $\{|g,e\rangle, |e,g\rangle\}$ et que $\hat{H}$ n'est pas diagonal uniquement dans le sous-espace engendré par ces vecteurs, il est "évident" que $[\hat{H},\hat{N}]=0$

d) Comme j'ai démontré $[\hat{H},\hat{N}]=0$ à partir du résultat demandé ... cela me semble inutile.

5) $\Rightarrow$ Voir la fin de la question 3 (Conclusion)