CORRECTION TD1 (I.4, I.5, I.6)

I.4.1

1/ $AB = |\,u\,\rangle\langle\,v\,|.|\,w\,\rangle\langle\,u\,| = \langle\,v\,|\,w\,\rangle\,|\,u\,\rangle\langle\,u\,|$ et de même $BA = \langle\,u\,|\,u\,\rangle|\,w\,\rangle\langle\,v\,|$.

2/
— $C|\,u\,\rangle$ est un vecteur,
— $\langle\,v\,|\lambda C\langle\,w\,| = \lambda\langle\,v\,|C|\,w\,\rangle$ est un nombre
— $A\langle\,u\,|\,v\,\rangle\langle\,w\,|\,u\,\rangle = \langle\,u\,|\,v\,\rangle\langle\,w\,|\,u\,\rangle A$ est un opérateur,
— $AC\lambda B = \lambda ACB$ est un opérateur.

3/ L'expression $|\,u\,\rangle\langle\,v\,|C\lambda|\,w\,\rangle\langle\,u\,| = \lambda(\langle\,v\,|C|\,w\,\rangle)(|\,u\,\rangle\langle\,u\,|)$ est un opérateur (un projecteur orthogonal) multiplié par un nombre.

I.4.2

1/ On a :

$$|\,\alpha\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\,\beta\,\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \langle\,\beta\,| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i, & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2/ On a :

$$|\,\phi\,\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(1+4i\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

3/ On a

$$|\,\alpha\,\rangle\langle\,\beta\,| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i, & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & -\sqrt{3} \\ -i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Systèmes à trois niveaux

1/ On a :

$$|\,u\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\,v\,\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \langle\,u\,| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

2/ On a :

$$|\,\phi\,\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3/

$$|\,u\,\rangle\langle\,v\,| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I.5 (Applications des postulats de la mesure en MQ)

1/ Si $|\,\psi\,\rangle$ est normalisé alors $|a|^2 + |b|^2 = 1$, donc on peut poser $|a| = \cos\theta$ et $|b| = \sin\theta$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$ car on doit garder $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$. Donc on peut écrire $a = \cos\theta\, e^{i\alpha}$ et $b = \sin\theta\, e^{i\beta}$, donc :

$$|\,\psi\,\rangle = e^{i\alpha}\left(\cos\theta|\,H\,\rangle + \sin\theta\, e^{i(\beta-\alpha)}|\,V\,\rangle\right)$$

Si on pose $\phi = \beta - \alpha \in [0, 2\pi]$, on obtient :

$$|\,\psi\,\rangle = e^{i\alpha}\left(\cos\theta|\,H\,\rangle + \sin\theta\, e^{i\phi}|\,V\,\rangle\right)$$

CONTRAIREMENT à ce que dit l'énoncé on n'obtient pas la formule donnée, mais une formule faisant apparaitre une phase $e^{i\alpha}$ supplémentaire. **MAIS un vecteur normalisé est défini à une phase près, donc on peut choisir** $\alpha = 0$ (mais c'est un choix : vous pouvez prendre un autre choix).

2.a/ $\hat{P}_\alpha$ est un projecteur orthogonal, donc $\hat{P}_\alpha^2 = \hat{P}_\alpha$, donc si $\hat{P}_\alpha|\,\phi\,\rangle = \lambda|\,\phi\,\rangle$, alors $\lambda^2 = \lambda$, donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. Une mesure de l'observable $\hat{P}_\alpha$ ne peut donner pour résultat qu'une valeur propre, donc que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Si le photon est dans l'état $|\,\psi(\alpha, 0)\,\rangle$ alors $\hat{P}_\alpha|\,\psi(\alpha, 0)\,\rangle = |\,\psi(\alpha, 0)\,\rangle$ donc $\lambda = 1$, ce qui correspond à la situation où le photon traverse le polariseur. Si le photon est dans l'état $|\,\psi(\alpha + \pi/2, 0)\,\rangle$ alors $\hat{P}_\alpha|\,\psi(\alpha + \pi/2, 0)\,\rangle = 0$ donc on a l'autre cas où $\lambda = 0$ ceci correspond au cas où le photon est absorbé (donc difficile de parler de "son état" après la mesure : il n'existe plus!!!)

Les probabilités sont obtenues par la règle de Born : si le photon est dans l'état $|\,H\,\rangle$ avant la mesure la probabilité d'obtenir $\lambda = 1$ (passage du photon) est donnée par :

$$P(\lambda = 1) = |\langle\,H\,|\,\psi(\alpha, 0)\,\rangle|^2 = \cos^2\alpha$$

Dans ce cas après la mesure le photon est dans l'état $|\,\psi(\alpha,0)\,\rangle$. Comme il n' y a que deux résultats possibles, on en déduit que :

$$P(\lambda=0)=1-P(\lambda=1)=\sin^2\alpha$$

On peut aussi écrire par application de la règle de Born :

$$P(\lambda=0)=|\langle\, H\,|\,\psi(\alpha+\pi/2,0)\,\rangle|^2=\sin^2\alpha$$

2.b/ La matrice de $\hat{P}_\alpha$ est donnée par :

$$\hat{P}_\alpha=\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}.(\cos\alpha,\sin\alpha)=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & 1-\cos 2\alpha\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres $\lambda=0,1$ et vecteurs propres $|\,\psi(\alpha,0)\,\rangle$ et $|\,\psi(\alpha+\pi/2,0)\,\rangle$ ont déjà été étudiés.

2.c/ Si on mesure $\hat{P}_{\pi/2}$ avec un photon dans l'état $|\,H\,\rangle$, la probabilité $P(\lambda=1)=0$ et $P(\lambda=0)=1$, c'est-à-dire que le photon ne "passe pas" le polariseur.

2.d/ Si on part toujours d'un photon dans l'état $|\,H\,\rangle$ et que l'on insère un polariseur décrit par $\hat{P}_{\pi/4}$ avant $\hat{P}_{\pi/2}$. La probabilité que le photon soit absorbé par le premier polariseur $\hat{P}_{\pi/4}$ (et ne traverse donc pas $\hat{P}_{\pi/2}$) est $P_1'=\sin^2\pi/4=1/2$. Le photon a donc aussi une probabilité $P_1=1/2$ de traverser le premier polariseur. S'il traverse $\hat{P}_{\pi/4}$, le photon (après $\hat{P}_{\pi/4}$) est dans l'état $|\,\psi(\pi/4,0)\,\rangle$, donc la probabilité qu'il traverse $\hat{P}_{\pi/2}$ est donnée par $P_2=\cos^2(\pi/2-\pi/4)=\cos^2\pi/4=1/2$.
Donc en partant de la configuration initiale $|\,H\,\rangle$, le photon a une probabilité $1/2\times 1/2=1/4$ de franchir l'ensemble des deux polariseurs et donc une probabilité $1-1/4=3/4$ d'être bloqué (absorbé soit au niveau du premier polariseur, soit au niveau du deuxième).

2.e/ Faire le calcul de $[\hat{P}_\alpha,\hat{P}_{\alpha+\pi/4}]=\hat{P}_\alpha\hat{P}_{\alpha+\pi/4}-\hat{P}_{\alpha+\pi/4}\hat{P}_\alpha$. On trouve $[\hat{P}_\alpha,\hat{P}_{\alpha+\pi/4}]\neq 0$, donc les opérateurs ne commutent pas.

I.6 (Espérance mathématique)

1/ $\mathbb{E}[X]=1\times p+0\times(1-p)=p$. Donc l'espérance mathématique de $X_{\alpha,\theta}$ (la valeur moyenne) est exactement la probabilité qu'un photon soit détecté, c'est-à-dire que p est le rapport du nombre de photon détectés divisé par le nombre de photons envoyés.
Considérée sous cet angle [1] (valeur moyenne), la probabilité p ne peut être "soumise" qu'à une incertitude "matérielle" (le fait de moyenner en pratique sur un nombre fini

1. Interprétation *fréquentiste* des probabilités

d'évènements et pas un nombre infini). Donc en théorie, une "expérience statistique parfaite" ne peut vous fournir qu'une valeur moyenne et une seule et donc un seul p (il ne peut pas y avoir plusieurs réponses). S'il demeure une incertitude sur p, alors cette incertitude ne concerne pas la valeur obtenue, mais le fait de savoir si cette valeur correspond à ce que vous cherchez à mesurer, c'est-à-dire sur le fait de savoir si le p observé est vraiment la probabilité de "tel évènement ou pas". Autrement dit votre expérience "mesure-t-elle" exactement ce que vous voulez. C'est évidemment un autre problème.

2/ L'écart-type est plus utilisé en Physique (et souvent plus intéressant) que la "variance" à savoir $\Delta[X] = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}$ (ecart-type = $\sqrt{\text{variance}}$). On trouve ici $\Delta[X] = \sqrt{p - p^2} = \sqrt{p(1-p)} = \cos(\alpha - \theta)\sin(\alpha - \theta)$.
$\Delta[X]$ est une estimation de l'incertitude "numérique" sur la valeur de l'observable $X_{\alpha,\theta}$ (c'est-à-dire le fait d'obtenir 0 ou 1), soit l'incertitude que l'on peut avoir a propos de l'évènement "le photon va-t-il ou pas traverser le polariseur". Lorsque $\Delta[X] = 0$ on a une certitude : soit le photon passe toujours ($\lambda = 1$ à chaque fois), soit jamais ($\lambda = 0$ à chaque fois). L'incertitude maximale est obtenue pour $p = 1/2$, on a alors $\Delta[X] = 1/2$.
Remarque : Une autre "mesure" de l'incertitude est donnée par *l'information (ou entropie) de Shannon* définie par $S = -\sum_\lambda p_\lambda \ln p_\lambda \geq 0$. Le cas $S = 0$ correspond à "l'absence d'incertitude".

3/ On peut obtenir les valeurs moyennes (espérances mathématiques) de $X_{\alpha,\theta} = X^2_{\alpha,\theta}$ par la formule $\mathbb{E}(X_{\alpha,\theta}) = \langle\, \psi(\theta, 0)\, |\hat{P}_\alpha|\, \psi(\theta, 0)\, \rangle$.