Mécanique Quantique

TD n°1 : Mécanique quantique appliquée à la polarisation du photon

1. Polarisation de la lumière et polariseurs
   (a) Polarisation rectiligne qui fait un angle θ avec l'axe x : $\hat{e}_p = \cos\theta \hat{e}_1 + \sin\theta \hat{e}_2$.
   (b) Polarisation circulaire gauche (droite) : $\hat{e}_p = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2)$. On considère la rotation :
   $$\hat{e}_1 \to \cos\beta \hat{e}_1 + \sin\beta \hat{e}_2; \qquad \hat{e}_2 \to -\sin\beta \hat{e}_1 + \cos\beta \hat{e}_2. \tag{1}$$
   $$\Rightarrow \hat{e}_p \to \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos\beta \hat{e}_1 + \sin\beta \hat{e}_2 \mp i \sin\beta \hat{e}_1 \pm i \cos\beta \hat{e}_2) =$$
   $$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{\mp i\beta} \hat{e}_1 \pm i e^{\mp i\beta} \hat{e}_2 \right) = \frac{e^{\mp i\beta}}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2) \tag{2}$$
   (c) Il faut d'abord introduire l'axe $\hat{e}_{\alpha,1}$, parallele à l'axe du polariseur, et l'axe $\hat{e}_{\alpha,2}$, perpendiculaire à l'axe du polariseur :
   $$\hat{e}_1 = \cos\alpha \hat{e}_{\alpha,1} - \sin\alpha \hat{e}_{\alpha,2}; \qquad \hat{e}_2 = \sin\alpha \hat{e}_{\alpha,2} + \cos\alpha \hat{e}_{\alpha,2}. \tag{3}$$
   On écrit donc le champ électrique dans la nouvelle base :
   $$\vec{E}(z,t) = \frac{E_0}{2} \left\{ \left[\left(\cos\theta e^{i\phi_1} \cos\alpha + \sin\theta e^{i\phi_2} \sin\alpha \right) \hat{e}_{\alpha,1} + \right.\right.$$
   $$\left.\left. + \left(-\cos\theta e^{i\phi_1} \sin\alpha + \sin\theta e^{i\phi_2 \cos\alpha} \right) \hat{e}_{\alpha,2} \right] e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \right\}. \tag{4}$$
   La probabilité que le photon est transmis est :
   $$p = \left| \cos\theta e^{i\phi_1} \cos\alpha + \sin\theta e^{i\phi_2} \sin\alpha \right|^2 = \tag{5}$$
   $$= \cos^2\theta \cos^2\alpha + \sin^2\theta \sin^2\alpha + \left(e^{i(\phi_1-\phi_2)} + e^{-i(\phi_1-\phi_2)} \right) \cos\theta \cos\alpha \sin\theta \sin\alpha = \tag{6}$$
   $$= \cos^2\theta \cos^2\alpha + \sin^2\theta \sin^2\alpha + 2\cos(\phi_2 - \phi_2) \cos\theta \cos\alpha \sin\theta \sin\alpha. \tag{7}$$
   En utilisant les identités trigonométriques données, on obtient :
   $$p = \frac{1}{4} (\cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta-\alpha))^2 + \frac{1}{4} (\cos(\theta+\alpha) - \cos(\theta-\alpha))^2 + \tag{8}$$
   $$- \frac{1}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) \left(\cos^2(\theta+\alpha) - \cos^2(\theta-\alpha) \right) = \tag{9}$$
   $$= \frac{1}{2} \left[(1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)) \cos^2(\theta+\alpha) + (1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \cos^2(\theta-\alpha) \right]. \tag{10}$$
   Pour $\phi_1 = \phi_2$ nous obtenons le résultat pour la polarisation rectiligne :
   $$p = \cos^2(\alpha - \theta). \tag{11}$$
   Pour $\phi_1 = \phi_2 + \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ nous obtenons le résultat pour la polarisation circulaire :
   $$p = \frac{1}{2} \left[\cos^2(\alpha + \pi/4) + \cos^2(\alpha - \pi/4) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos^2(\alpha + \pi/4) + \sin^2(\alpha + \pi/4) \right] = \frac{1}{2}. \tag{12}$$
2. Formalisme de Dirac

(a) On écrit l'état dans le texte en utilisant la forme polaire pour a et b :

$$|\Psi\rangle = r_1 e^{i\phi_1}|H\rangle + r_2 e^{i\phi_2}|V\rangle; \qquad r_1 = |a| \geq 0,\ r_2 = |b| \geq 0. \tag{13}$$

Après, on normalise l'état :

$$1 = \langle\Psi|\Psi\rangle = r_1^2 + r_2^2. \tag{14}$$

En utilisant la trigonométrie, on peut introduire l'angle θ et :

$$r_1 = \cos\theta;\ r_2 = \sin\theta;\ \theta \in [0, \pi/2]. \tag{15}$$

Comme $|\Psi\rangle$ et $e^{i\alpha}|\Psi\rangle$ décrivent le même état physique, on multiplie $|\Psi\rangle$ par $e^{-i\phi_1}$:

$$|\Psi\rangle = \cos\theta|H\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|V\rangle; \quad \phi = \phi_2 - \phi_1. \tag{16}$$

(b) Les résultats de la mesure sont les valeurs propres de $\hat{P}_\alpha$. $\hat{P}_\alpha$ est un projecteur car $\hat{P}_\alpha^2 = \hat{P}_\alpha$ et donc il a valeurs propres 1 et 0. Il y a deux valeurs propres, et donc un valeur propre est 0 et l'autre est 1. Le vecteur propre associé à 1 est $|\psi(\alpha, 0)\rangle$. L'état est projeté sur $|\psi(\alpha, 0)\rangle$ et donc le photon passe le polariseur. Le vecteur propre associé à 0 est $|\psi(\alpha+\pi/2, 0)\rangle$ (vérifier que $\langle\psi(\alpha)|\psi(\alpha + \pi/2)\rangle = 0$) et donc le photon est absorbé par le polariseur et il ne passe pas. La probabilité de mesurer 1 est : $p = |\langle\psi(\alpha, 0)|\psi(\theta, \phi)\rangle|^2$. La probabilité de mesurer 0 est : $1 - p = |\langle\psi(\alpha + \pi/2, 0)|\psi(\theta, \phi)\rangle|^2$. Si on mesure 1, l'état du photon est $|\psi(\alpha, 0)\rangle$. Si on mesure 0, l'état du photon est $|\psi(\alpha + \pi/2, 0)\rangle$ (pas forcement correct si le polariseur est un polariseur à absorption).

(c)

$$P_\alpha = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{17}$$

(d) 0

(e) probabilité 3/4 de mesurer 0 ; probabilité 1/4 de mesurer 1.

3. Calcul formel en notation de Dirac

(a)

$$|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad |\beta\rangle = \begin{pmatrix} i/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \qquad \langle\beta| = \begin{pmatrix} -i/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

(b)

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 5/(3\sqrt{2}) \\ 1/(3\sqrt{2}) + i\sqrt{6}/3 \end{pmatrix} \tag{19}$$

(c)

$$|\alpha\rangle\langle\beta| = \begin{pmatrix} -i/(2\sqrt{2}) & -\sqrt{3}/(2\sqrt{2}) \\ -i/(2\sqrt{2}) & -\sqrt{3}/(2\sqrt{2}) \end{pmatrix} \tag{20}$$

4. Espérance Mathématique

(a) $\mathbb{E}[X_{\alpha,\theta}] = \cos^2(\alpha - \theta)$

(b) $\Delta[X_{\alpha,\theta}] = \cos^2(\alpha - \theta) - \cos^4(\alpha - \theta) = \cos^2(\alpha - \theta)\ \sin^2(\alpha - \theta)$

(c) $\mathbb{E}[X_{\alpha,\theta}] = \langle\psi(\theta, 0)|\hat{P}_\alpha|\psi(\theta, 0)\rangle$. à montrer.

5. Mesures de polarisation et lame à retard

(a) Si on mesure un photon transmis, on peut dire que la polarisation n'est pas rectiligne et perpendiculaire à l'axe du polariseur. Si le photon n'est pas transmis, on peut dire que la polarisation n'est pas rectiligne et parallèle à l'axe du polariseur.

(b) Si on répète la mesure avec plusieurs photons, on peut reconstruire la valeur de p, c'est à dire :

$$p = \frac{1}{2}\left[(1-\cos(\phi_1-\phi_2))\cos^2(\theta+\alpha) + (1+\cos(\phi_1-\phi_2))\cos^2(\theta-\alpha)\right]. \tag{21}$$

On n'a pas accès aux valeurs de $\phi_1 - \phi_2$ et de θ.

(c) Si on peut varier l'orientation de l'axe du polariseur, α, on peut reconstruire la valeur de θ et de $\cos(\phi_1 - \phi_2)$.

(d) Si on a seulement accès à $\cos(\phi_1 - \phi_2)$, on ne connaît pas le signe de $\phi_1 - \phi_2$, et donc on ne peut pas dire si une polarisation circulaire a chiralité gauche ou droite.

(e) Une lame à retard turne la polarisation circulaire entre un polarisation rectiligne :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_1 \pm i\hat{e}_2\right) \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{e}_1 \mp \hat{e}_2\right). \tag{22}$$

En utilisant un filtre polariseur avec angle $\alpha = \pi/4$, on peut mesurer la polarisation du photon qui sorte de la lame à retard.

(f) La lame à retard n'est pas un processus de mesure, elle est simplement un processus qui modifie la polarisation d'un photon.

6. Succession de filtres polariseurs

(a) La probabilité que un photon est transmis par le polariseur est $p = \cos^2(\theta - \alpha)$ dont θ est l'angle de la polarisation rectiligne et α est l'angle du polariseur. Comme dans le problème l'angle entre la polarisation du photon et l'axe du polariseur est toujours $\pi/(2N)$, nous obtenons de façon générique :

$$p_N = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)\right]^{2N}. \tag{23}$$

Pour $N = 1$: $p_1 = \cos^2(\pi/2) = 0$. Pour $p_2 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = 1/4$. Pour $N = 90$ on peut faire l'approximation suivante $[\cos(\pi/180)]^{180} \sim [1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{180^2}]^{180} \sim 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{180} \approx 1 - 0.055 = 0.945$. Pour $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{N^2}\right]^{2N} = 1. \tag{24}$$

(b) La probabilité qu'un photon de polarisation circulaire est transmis par un polariseur est : $p = \frac{1}{2}$. Après avoir passé le première filtre, la polarisation du filtre est rectiligne. Donc :

$$p_N = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right)\right]^{2(N-1)}. \tag{25}$$

Pour $N = 1$, $p_1 = 1/2$. Pour $N = 2$, $p_2 = 1/2 \times 1/2 = 1/4$. Pour $N = 90$, $p_{90} = \frac{1}{2}[\cos(\pi/180)]^{178} \sim \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}\frac{178}{180}\frac{\pi^2}{180}) \approx \frac{1}{2}(1 - 0,0542) = 0,473$. Pour $N \to \infty$, $\lim_{N\to\infty} = 1/2$.

(c) La probabilité qu'un photon est transmis par $N \to \infty$ polariseurs est :

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \lim_{N\to\infty}\left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right]^{2N} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{N}\right)^{2N} = e^{-1} \approx 0,36. \tag{26}$$