Correction TD postulats

Ex I

Dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ $\quad |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|2\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A|1\rangle = a|2\rangle \\ A|2\rangle = a|1\rangle \end{cases}$ en notations Dirac.

$B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} B|1\rangle = b|1\rangle \\ B|2\rangle = -b|2\rangle \end{cases}$

1) A, B hermitiens (hermitiques) $\iff \begin{cases} A = A^\dagger \\ B = B^\dagger \end{cases}$ $\quad \dagger \equiv$ trans conjugué

$A^\dagger = a^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ car $a \in \mathbb{R}$.

$B^\dagger = b^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B$ car $b \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Je suppose $\underline{a, b > 0}$ par la suite.

2)

* Val. propres de A $\iff \det(A - \lambda\, Id) = 0 \iff \begin{vmatrix} -\lambda & a \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\iff \lambda^2 - a^2 = 0 \iff \lambda = \pm a$.

* Vect. propres de A

- Pour $\lambda = a$, il faut trouver $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\iff a \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff y = x \Rightarrow$ sol. $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \; \forall x \in \underline{\underline{\mathbb{C}}}$

On <u>normalise</u> $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = (x^*, x^*) \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = 2|x|^2 = 1$

$\Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

La phase de "x" est <u>libre</u> (arbitraire) $\Rightarrow$ on prend $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc le vect. propre $|a\rangle$ tel que $A|a\rangle = a|a\rangle$ est :

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle)$$

- Pour $\lambda = -a$, il faut trouver $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ / $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \quad a\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow$ sol $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$, $\forall x \in \mathbb{C}$

On <u>normalise</u> $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}^{+}\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = (x^{*}, -x^{*})\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = 2|x|^2 = 1$

$\Rightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

La phase de "x" est arbitraire $\Rightarrow$ on prend $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc le vect. propre $|-a\rangle$ tel que $A|-a\rangle = (-a)|-a\rangle$ est

$$|-a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$$

Pour B la sol. est plus simple car on remarque que :

$$B|1\rangle = b|1\rangle \text{ et } B|2\rangle = -b|2\rangle$$

Donc les val. propres sont $\{b, -b\}$ associés aux vect. propres $|1\rangle$ et $|2\rangle$ (respectivement), i.e $|b\rangle = |1\rangle$ et $|-b\rangle = |2\rangle$

3). - Les résultats d'une mesure de A sont les val. propres a et $-a$.

- " " " de B sont b et $-b$.

4) On suppose $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ ($|\psi\rangle$ est bien normalisé $\langle\psi|\psi\rangle = 1$)

si l'on mesure B d'après la règle de Born la proba d'obtenir b et $-b$ sont :

$$\text{proba}(b) = |\langle b|\psi\rangle|^2 = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = 1/2$$
$$\text{proba}(-b) = |\langle -b|\psi\rangle|^2 = |\langle 2|\psi\rangle|^2 = 1/2$$

<u>Rq</u> Comme on a forcément proba(b) + proba$(-b) = 1$, le calcul d'une des proba donne l'autre.

5) Si la mesure donne "b", d'après la proj. du paquet d'onde, l'état $|\phi_1\rangle$ du système après la mesure est:

$$|\phi_1\rangle = |+b\rangle = |1\rangle$$

6) Si l'on refait juste après une autre mesure de B, le résultat sera inchangé et redonnera "b" et l'état restera.
$|\phi_1\rangle = |1\rangle$ -

7) Si l'on fait maintenant 1 mesure de A, d'après la règle de Born:

$$\text{proba}(+a) = |\langle a|\phi_1\rangle|^2 = |\langle a|1\rangle|^2 = |\langle 1|a\rangle|^2$$

Or $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle) \Rightarrow \text{proba}(+a) = 1/2$

On en déduit que $\text{proba}(-a) = 1 - \text{proba}(+a) = 1/2$

8) Si l'on obtient "a" comme résultat, alors d'après le postulat de proj. du paquet d'onde $|\phi_2\rangle = |+a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$

9) Si l'on recommence une mesure de B, comme $|\phi_2\rangle = |\phi\rangle$
On aura de nouveau les 2 résultats possibles "+b" et "-b" avec une proba de $+1/2$ (question 4)

Ex 2

A $t=0$ on a $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle$

$|\psi_0\rangle$ est bien normalisé $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 + |\frac{1}{2}|^2 + |\frac{1}{2}|^2 = 1$

1) On mesure l'énergie donc H.
Or $H|\phi_1\rangle = \hbar\omega_0|\phi_1\rangle$, $H|\phi_2\rangle = 2\hbar\omega_0|\phi_2\rangle$, $H|\phi_3\rangle = 2\hbar\omega_0|\phi_3\rangle$

Donc les 3 val. propres sont $\hbar\omega_0$, $2\hbar\omega_0$ et $2\hbar\omega_0$ est dégénérée 2 fois.

Une mesure de l'énergie va donc donner $\hbar\omega_0$ ou $2\hbar\omega_0$

$$\text{proba}(\hbar\omega_0) = |\langle\phi_1|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

D'où proba $(2\hbar\omega_0) = 1 - \text{proba}(\hbar\omega_0) = \frac{1}{2}$

Par le calcul direct de la règle de Born il faut tenir compte de la dégénérescence :

$$\text{proba}(2\hbar\omega_0) = |\langle\phi_2|\psi\rangle|^2 + |\langle\phi_3|\psi\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Pour le calcul des valeurs moyennes

$$\langle H\rangle_{\phi_0} = \langle\phi_0|H|\phi_0\rangle \text{ et } |\phi_0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle\phi_0| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\langle H\rangle_{\phi_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar\omega_0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle H\rangle_{\phi_0} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$$

De même :

$$\langle H^2\rangle_{\phi_0} = (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= (\hbar\omega_0)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (\hbar\omega_0)^2\left(\frac{1}{2} + 1 + 1\right) = \frac{5}{2}(\hbar\omega_0)^2$$

Donc

$$\Delta H = \sqrt{\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2} = \left[\frac{5}{2}(\hbar\omega_0)^2 - \frac{9}{4}(\hbar\omega_0)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$$

2) On a $A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque que $A|\phi_1\rangle = a|\phi_1\rangle$ donc on connait 1 val. propre "a" et 1 vect. propre $|\phi_1\rangle$.

Donc il suffit de diagonaliser A dans le sous espace engendré par les vect. $|\phi_2\rangle$ et $|\phi_3\rangle$. Mais on reconnait alors dans la matrice $a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ celle du premier exercice.

Donc
$$\begin{cases} A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle\right) = +a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle\right) \\ A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle\right) = -a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_3\rangle\right) \end{cases}$$

Donc A a 2 val. propres "$+a$" et "$-a$".

- La valeur "a" est deux fois dégénérée, vect. propres $\begin{cases} |a,1\rangle = |\phi_1\rangle \\ |a,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle) \end{cases}$
- La valeur "$-a$" est non dégénérée et $|-a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_2\rangle - |\phi_3\rangle)$

Une mesure de A donne pour valeurs possibles "$+a$" et "$-a$"

D'après la règle de Born

$$\text{proba}(-a) = |\langle -a|\psi_0\rangle|^2 = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_3|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle\right)\right|^2$$
$$= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \underline{\underline{0}}$$

Donc $\text{proba}(+a) = 1 - 0 = 1$

On peut retrouver ce résultat :

$$\text{proba}(+a) = |\langle a,1|\psi_0\rangle|^2 + |\langle a,2|\psi_0\rangle|^2$$
$$= |\langle\phi_1|\psi_0\rangle|^2 + \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_3|\right)|\psi_0\rangle\right|^2$$
$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

<u>Conclusion</u> Une mesure de A donne avec certitude "+a"

⇒ Comme on est certain du résultat, il n'y aura pas de changement dans l'état du système.

⇒ Retrouvons ce résultat avec la proj. du paquet

$$|\psi'\rangle = \sqrt{\frac{1}{\text{prob}(a)}}\left[\langle a,1|\psi_0\rangle\, |a,1\rangle + \langle a,2|\psi_0\rangle\, |a,2\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|a,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|a,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\left(|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle\right) = |\psi_0\rangle$$

3) On fait évoluer le syst. avec l'éq. de Schrodinger :

$$i\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}|\psi_t\rangle = H|\psi_t\rangle$$

Comme $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ est base propre de H, si

$$|\psi_0\rangle = c_1\,|\phi_1\rangle + c_2\,|\phi_2\rangle + c_3\,|\phi_3\rangle$$

alors $$|\psi_t\rangle = c_1\, e^{-i\frac{\hbar\omega_0}{\hbar}t}\,|\phi_1\rangle + c_2\, e^{-i\frac{2\hbar\omega_0}{\hbar}t}\,|\phi_2\rangle + c_3\, e^{-i\frac{2\hbar\omega_0}{\hbar}t}\,|\phi_3\rangle$$

⇒ $$|\psi_t\rangle = c_1\, e^{-i\omega_0 t}\,|\phi_1\rangle + c_2\, e^{-2i\omega_0 t}\,|\phi_2\rangle + c_3\, e^{-2i\omega_0 t}\,|\phi_3\rangle$$

<u>Ici</u> : $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{2}$

$$\boxed{|\psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\omega_0 t}\,|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\, e^{-2i\omega_0 t}\,|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}\, e^{-2i\omega_0 t}\,|\phi_3\rangle}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}\, e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}\, e^{-2i\omega_0 t} \end{pmatrix}$$

4)

$$\langle B\rangle(t) = \langle\psi_t|B|\psi_t\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{+i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}\right)\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0 t}\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}\right)\begin{pmatrix} \frac{b}{2}e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{b}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{b}{2}e^{-2i\omega_0 t}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{b}{2\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} + \frac{b}{2\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t} + \frac{b}{4} = \frac{b}{4} + \frac{b}{\sqrt{2}}\cos\omega_0 t$$

$$\langle A\rangle(t) = \langle\psi_t|A|\psi_t\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}\right)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{1}{2}e^{-2i\omega_0 t}\end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}, \frac{1}{2}e^{2i\omega_0 t}\right)\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t} \\ \frac{a}{2}e^{-2i\omega_0 t} \\ \frac{a}{2}e^{-2i\omega_0 t}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = a.$$

5) - Si l'on fait une mesure de A à l'instant t :

$$\text{proba}_t(-a) = |\langle -a|\psi_t\rangle|^2 = \left|\frac{\langle\phi_2| - \langle\phi_3|}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2}|\phi_2\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2}|\phi_3\rangle\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2i\omega_0 t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2i\omega_0 t}\right|^2 = 0$$

$$\text{proba}_t(+a) = 1 - \text{proba}_t(-a) = 1$$

- Si on fait une mesure de B $\Rightarrow$ il faut diagonaliser B :

~~proba~~ Val-propres $+b$ et $-b$. Vect-propre de "$-b$" est $|-b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle - |\phi_2\rangle)$

$$\text{proba}_t(-b) = |\langle -b|\psi_t\rangle|^2 = \left|\frac{\langle\phi_1| - \langle\phi_2|}{\sqrt{2}}\left(\frac{e^{-i\omega_0 t}}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2}|\phi_2\rangle + \frac{e^{-2i\omega_0 t}}{2}|\phi_3\rangle\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}e^{-i\omega_0 t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-2i\omega_0 t}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_0 t}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\cos\omega_0 t\right)$$

$$\text{proba}_t(+b) = 1 - \text{proba}_t(-b)$$