

L3 D2PFO
(MÉCANIQUE QUANTIQUE I)

TD POSTULATS DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

1 Exercice

On considère un système quantique décrit par un espace des états à deux dimensions, on considère les observables A et B dont les matrices dans une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ s'écrivent :

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des paramètres réels.

1. Vérifier que A et B sont bien des opérateurs hermitiques. A et B commutent-elles ?
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A et B .
3. Quelles sont les valeurs possibles pour une mesure de A ?, de B ?
4. On suppose que le système est dans l'état

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

Si l'on mesure B quelles sont les probabilités d'obtenir la valeur b ? $-b$?

5. Supposons que l'on obtienne b , quel est l'état $|\psi_1\rangle$ du système après la mesure ?
6. Si l'on refait une mesure de B (après la précédente) peut-on prédire le résultat de la mesure ? L'état est-il modifié de nouveau par cette nouvelle mesure ?
7. Si l'on fait maintenant une mesure de A , quelles probabilités a-t-on de mesurer a et $-a$?
8. Supposons que l'on obtienne la valeur a , quel est l'état $|\psi_2\rangle$ du système après la mesure ?
9. Si l'on recommence à mesurer B peut-on toujours prédire le résultat ? Sinon quelles probabilités a-t-on de mesurer b et $-b$?

2 Exercice

On considère un "système à 3 états", c'est-à-dire un système dont l'espace des états est de dimension 3. Soit $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle$ une base orthonormée de cet espace.

Dans cette base, on suppose que l'hamiltonien H et deux observables A et B s'écrivent :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où ω_0, a, b sont des constantes.

A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}|\phi_2\rangle + \frac{1}{2}|\phi_3\rangle$$

1. On mesure à l'instant $t = 0$ l'énergie. Quelles valeurs trouve-t-on, avec quelles probabilités ? Calculer dans l'état $|\psi(0)\rangle$ les quantités $\langle H \rangle$ et ΔH .
2. Au lieu de mesurer H , on mesure A . Quels résultats trouve-t-on, avec quelles probabilités ? Quelle est la fonction d'onde immédiatement après la mesure ?
3. Quel est l'état du système à l'instant t , $|\psi(t)\rangle = ?$
4. Calculer les valeurs moyennes $\langle B \rangle (t)$ et $\langle A \rangle (t)$ de B et A à l'instant t .
5. Quels résultats obtient-on si on mesure à l'instant t l'observable A ? Même question pour B .