CORRECTION TD1 (I.4, I.5, I.6)

I.4.1

1/ $AB = |\,u\,\rangle\langle\,v\,|.|\,w\,\rangle\langle\,u\,| = \langle\,v\,|\,w\,\rangle\,|\,u\,\rangle\langle\,u\,|$ et de même $BA = \langle\,u\,|\,u\,\rangle|\,w\,\rangle\langle\,v\,|$.

2/
— $C|\,u\,\rangle$ est un vecteur,
— $\langle\,v\,|\lambda C\langle\,w\,| = \lambda\langle\,v\,|C|\,w\,\rangle$ est un nombre
— $A\langle\,u\,|\,v\,\rangle\langle\,w\,|\,u\,\rangle = \langle\,u\,|\,v\,\rangle\langle\,w\,|\,u\,\rangle A$ est un opérateur,
— $AC\lambda B = \lambda ACB$ est un opérateur.

3/ L'expression $|\,u\,\rangle\langle\,v\,|C\lambda|\,w\,\rangle\langle\,u\,| = \lambda(\langle\,v\,|C|\,w\,\rangle)(|\,u\,\rangle\langle\,u\,|)$ est un opérateur (un projecteur orthogonal) multiplié par un nombre.

I.4.2

1/ On a :

$$|\,\alpha\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\,\beta\,\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \langle\,\beta\,| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i, & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

2/ On a :

$$|\,\phi\,\rangle = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}}(1+4i\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$

3/ On a

$$|\,\alpha\,\rangle\langle\,\beta\,| = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i, & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & -\sqrt{3} \\ -i & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Systèmes à trois niveaux

1/ On a :

$$|\,u\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\,v\,\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \langle\,u\,| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

2/ On a :

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

3/

$$|u\rangle\langle v| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$