MÉCANIQUE QUANTIQUE TRAVAUX DIRIGÉS (L3-S1 PHYS FONDA) 2024 – 2025

UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Table des matières

1
TD n°1 – Équation de Schrödinger

1.1 Puits de potentiel fini, carré - États liés

On considère une particule de masse m dont l'énergie potentielle $V(x)$ a la forme d'un puits carré, c'est-à-dire définie par : $V(x) = -V_0 < 0$ pour $-a/2 < x < a/2$ et nulle ailleurs (voir figure 1.1).

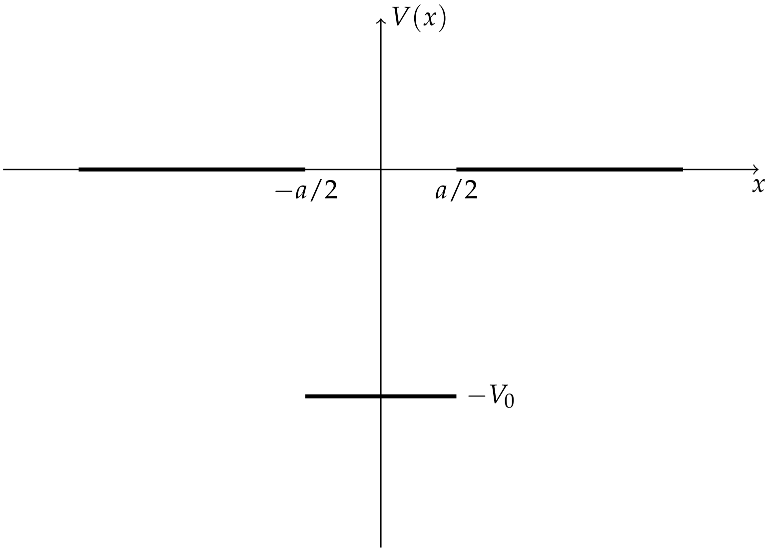

FIGURE 1.1: Energie potentielle $V(x)$ de la particule en fonction de x.

1.1.1 Mouvement classique

Rappeler ce que serait le mouvement de la particule en mécanique classique. On distinguera le cas où $E > 0$ et le cas où $-V_0 < E < 0$.

1.1.2 Calcul des états liés ($-V_0 < E < 0$)

1. Écrire l'équation de Schrödinger stationnaire et la résoudre dans chacune des trois zones. On posera :

$$k = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}, \qquad K = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}} \qquad \text{et} \qquad k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

où E est la valeur propre de H considérée.

2. On peut montrer que, dans le cas d'une discontinuité de potentiel finie, les fonctions d'ondes restent bornées, continues et de dérivée continue. Ecrire les relations qui en découlent en $x = a/2$ et montrer que :

$$k = K \tan(Ka/2) \qquad \text{solutions paires}$$
$$k = -K \cot(Ka/2) \qquad \text{solutions impaires}$$

   Montrer par une méthode graphique simple qu'il y a quantification des énergies (indice : on pourra tracer, en fonction de la variable K, les courbes d'équation $y = |\cos(Ka/2)|$ et $y = |\sin(Ka/2)|$, en prenant garde à la condition sur le signe de $\tan(Ka/2)$). Montrer qu'il existe toujours au moins un état lié. Que se passe-t-il lorsque le puits devient très profond ?

1.1.3 Puits infiniment profond

1. On considère maintenant un puits carré infiniment profond, $V_0 \to \infty$. Calculer les énergies des états liés dans ce cas. A quelle échelle d'énergie doit-on comparer V_0 pour pouvoir parler de puits très profond ?
2. Etudier les fonctions d'ondes correspondant aux états liés d'un puits infiniment profond. Montrer que pour $V_0 \to \infty$ la fonction d'onde est continue, que sa dérivée est discontinue et que la fonction d'onde s'annule à l'extérieur du piège.
3. Etudier le cas où V_0 tend vers l'infini et a tend vers zéro avec $V_0 a$ constant.

1.2 Puits de potentiel fini, carré - États libres $(E > 0)$

Dans le cas du puits carré du 1.1, on étudie le cas stationnaire correspondant à $E > 0$ (états libres).

1. Résoudre l'équation de Schrödinger dans chacune des trois zones et écrire les relations de raccordement.
2. Montrer que pour toute énergie E, les solutions forment un espace vectoriel de dimension deux. Montrer que toute solution peut se décomposer en deux ondes planes qui se propagent en sens contraire. Peut-on normer ces solutions ?

2

TD n°2 – Courant de probabilité et effet tunnel

2.1 Courant de probabilité

Soit $\psi(\vec{r},t)$ la fonction d'onde d'une particule de masse m placée dans un potentiel $V(\vec{r})$.

On définit la densité de probabilité de présence de la particule au point $\vec{r}$ et à l'instant t par :

$$\rho(\vec{r},t) = \mid \psi(\vec{r},t) \mid^2 = \psi(\vec{r},t)^* \psi(\vec{r},t) \ . \tag{2.1}$$

1. Montrer que cette densité satisfait à l'équation de *continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \tag{2.2}$$

où le *courant de probabilité* $\vec{J}$ est donné par

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^* \left(\vec{\nabla} \psi \right) - \left(\vec{\nabla} \psi^* \right) \psi \right] \ . \tag{2.3}$$

2. Donner $\vec{J}$ pour une fonction d'onde de la forme

$$\psi(\vec{r},t) = A e^{if(\vec{r},t)}. \tag{2.4}$$

3. Préciser $\vec{J}$ dans le cas d'une onde plane, $f(\vec{r},t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$.

2.2 Effet tunnel

On considère dans un problème unidimensionnel, le potentiel suivant

$$V(x) = \begin{cases} U_0 & \text{pour } |x| < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{pour } |x| \geqslant \frac{a}{2} \end{cases} \ .$$

On pose dans la suite $U_0 = \frac{\hbar^2}{2m} K^2 > 0$. On numérote les trois régions de l'espace $]-\infty, -\frac{a}{2}]$, $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ et $[\frac{a}{2}, \infty[$ respectivement 1, 2 et 3.

1. Représenter graphiquement le potentiel.
2. Ecrire la fonction d'onde d'énergie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ en termes des ondes se propageant vers les x croissants et vers les x décroissants d'amplitudes respectives A_i^+ et A_i^- (i=1,2,3). On posera dans la suite $q^2 = k^2 - K^2$.

3. Calculer les courants de probabilités dans les trois régions d'espace en fonction des $A_i^{\pm}$.
4. On étudie le cas où l'onde entrante vient de $-\infty$. Etablir le système d'équations vérifiées par les amplitudes $A_i^{\pm}$.
5. Calculer les coefficients de réflexion (r) et transmission (t) associés aux amplitudes pour l'ensemble de la barrière.
6. Montrer d'une manière générale que les coefficients de transmission et de réflexion définis par $T = |t|^2$ et $R = |r|^2$ vérifient $R + T = 1$. Vérifier cette égalité pour la situation étudiée ici.
7. Calculer le coefficient de transmission $T = |t|^2$ dans le cas où $E > U_0$ et le mettre sous la forme

$$T(\Phi) = \frac{1}{1 + A^2 \sin^2(\Phi)} \quad \text{avec } \Phi = qa,$$

   avec A une fonction de k et q à déterminer. Montrer que $T(\Phi)$ possède des résonances. Donner leurs positions et largeurs. La fonction T est l'analogue de celle qui décrit la transmission d'un dispositif optique bien connu. Lequel ?
8. On suppose maintenant $0 < E < U_0$. Calculer explicitement $t(a)$ et $T(a) = |t(a)|^2$. Quel est l'analogue optique de ce phénomène ?
9. On considère une double hétérojonction de semi-conducteurs GaAs/Ga$_{1-x}$Al$_x$As avec les paramètres suivants :
   - masse effective de l'électron égale à 0.067 m$_e$
   - $U_0 \simeq 375$ meV pour $x = 0{,}3$
   - largeur de la barrière entre 1 et 10 nm.

   Quelle est la probabilité de passage pour un électron d'énergie cinétique $E = 40$ meV ?

3
TD n° 3 – Polarisation du photon

3.1 Polarisation de la lumière

Le champ électrique d'une onde plane qui se propage dans la direction de l'axe z s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = \frac{E_0}{2}\left(\cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta e^{i\phi}\vec{e_y}\right)e^{i(kz-\omega t)} + c.c. \tag{3.1}$$

$\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ sont les vecteurs unitaires selon les axes x et y. La polarisation de l'onde ou du photon unique, est décrite par un vecteur unitaire :

$$\vec{e_p} = \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta e^{i\phi}\vec{e_y}. \tag{3.2}$$

1. Écrire le vecteur $\vec{e_p}$ pour un photon de polarisation rectiligne.
2. Écrire le vecteur $\vec{e_p}$ pour un photon de polarisation circulaire gauche et pour un photon de polarisation circulaire droite ; montrer que les expressions obtenues sont invariantes par rotations des axes Ox et Oy autour de l'axe Oz (à une phase près sans importance).
3. Montrer que l'on peut se limiter à $\theta \in [0;\pi/2]$ et $\phi \in [0;2\pi[$ dans l'équation 3.2 sans perte de généralité. Ceci suggère de représenter l'état de polarisation $\vec{e_p}$ par un point sur une sphère de rayon unité ayant pour coordonnées sphériques 2θ et ϕ. Cette représentation est appelée sphère de Bloch. Quels sont les états de polarisation associés aux deux pôles ? Quelle partie de la sphère de Bloch est associée aux polarisations linéaires ? Où se trouvent les deux polarisations circulaires sur la sphère de Bloch ?

3.2 Effet d'un polariseur

Un filtre polarisant est une feuille de matière synthétique employée pour polariser la lumière ; le filtre transmet la lumière avec une polarisation parallèle à un axe donné et absorbe celle avec une polarisation orthogonale à cet axe. Considérons d'abord un faisceau de lumière d'intensité I_0 ayant une polarisation rectiligne qui fait un angle θ avec l'axe x. Si le faisceau rencontre un polariseur dont l'axe fait un angle α avec l'axe x, l'intensité transmise est $I_0\cos^2(\alpha-\theta)$ (loi de Malus).

Décrivons cela en termes de photons qui sont, rappelons-le, des particules insécables. Lorsqu'un photon arrive sur un polariseur, quel que soit son état de polarisation, ou bien il passe, ou bien il ne passe pas.

Si le photon passe, la polarisation est rectiligne et parallèle à l'axe du polariseur. La loi de Malus en termes de photons s'énonce : "un photon a une probabilité $\cos^2(\alpha - \theta)$ de traverser le polariseur". Plus généralement, la probabilité qu'un photon soit transmis par le polariseur est $|\vec{e_p} \cdot \vec{e_\alpha}|^2$, où $\vec{e_\alpha}$ est le vecteur unitaire parallèle à l'axe du polariseur.

Donner la probabilité qu'un polariseur dont l'axe de transmission fait un angle α avec l'axe x transmette un photon avec la polarisation $\vec{e_p}$ dans l'équation (3.2). Utiliser le résultat pour retrouver la probabilité de transmission pour un photon de polarisation rectiligne et pour un photon de polarisation circulaire. Conseil : utiliser les identités trigonométriques :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right) \quad (3.3)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right) \quad (3.4)$$

3.3 Mesures de polarisation et lame à retard

On considère une expérience dans laquelle on peut préparer un grand nombre de photons avec la même polarisation.

1. La polarisation est inconnue et on essaie de la déterminer en utilisant seulement un filtre polariseur et un détecteur de photons idéal.

   (a) Quelles informations peut-on obtenir après avoir envoyé un seul photon sur le filtre polariseur ?

   (b) Quelles informations peut-on obtenir en envoyant plusieurs photons sur le même polariseur ?

   (c) Quelles informations peut-on obtenir si on tourne l'axe du polariseur ?

   (d) Est-il possible de déterminer la chiralité droite ou gauche dans le cas d'une polarisation circulaire ?

2. Une lame à retard est un outil optique capable de modifier la polarisation de la lumière la traversant ; cet effet vient de la biréfringence du cristal constituant la lame. Dans cet exercice, nous considérons une lame quart d'onde, qui change la polarisation des photons qui la traversent selon la loi suivante :

$$\cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta e^{i\phi}\vec{e_y} \;\rightarrow\; \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta e^{i\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)}\vec{e_y}. \quad (3.5)$$

   (a) Peut-on considérer la transmission par une lame à retard comme un processus de mesure ?

   (b) Montrer qu'en utilisant une lame à retard, un polariseur et un détecteur de photons, il est possible de déterminer si une polarisation circulaire a une chiralité droite ou gauche.

3.4 Succession de filtres polariseurs (facultatif)

On étudie une succession de N filtres polariseurs, dont les plans sont orthogonaux au même axe z ; la direction de l'axe de transmission du n-ème filtre est spécifiée par l'angle α_n qu'il fait avec l'axe x.

1. Donner la probabilité qu'un photon ayant une polarisation rectiligne selon l'axe x soit transmis par tous les filtres dans le cas où $\alpha_n = \frac{n}{N}\frac{\pi}{2}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$. Étudier les cas $N = 1$, $N = 2$, $N = 90$ et $N \to \infty$.
2. Répéter le calcul pour un photon initialement dans un état de polarisation circulaire.

3.5 Représentation et notation de Dirac

3.5.1 Calcul formel en notation de Dirac

Associativité : Soit λ un scalaire, $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle$ des états physiques, on notera :

$$A = |u\rangle\langle v|, \qquad B = |w\rangle\langle u|\ , \qquad C \text{ un opérateur quelconque}$$

1. Vérifier que A et B sont des opérateurs puis calculer les produits AB et BA.
2. Donner la nature (scalaire, vecteur ou opérateur) des objets suivants et les simplifier, le cas échéant.
   — $C|u\rangle$
   — $\langle v|\lambda C|w\rangle$
   — $A\langle u|v\rangle\langle w|u\rangle$
   — $AC\lambda B$
3. D'après ce qui précède, justifier que l'expression $|u\rangle\langle v|C\lambda|w\rangle\langle u|$ a un sens.

Conjugaison : Soit λ un scalaire, $|u\rangle, |v\rangle, |w\rangle$ des états physiques, A un opérateur. La conjuguée hermitique d'une séquence donnée s'obtient en prenant la séquence dans **l'ordre inverse**, et en remplaçant chaque terme par son conjugué, suivant la correspondance suivante :

$$\lambda \longleftrightarrow \bar{\lambda} \tag{3.6}$$
$$|x\rangle \longleftrightarrow \langle x| \tag{3.7}$$
$$A \longleftrightarrow A^\dagger \tag{3.8}$$

Écrire la conjuguée des objets suivants et préciser sa nature :
— $A|u\rangle$
— $A|u\rangle\langle v|\lambda i$
— $|u\rangle\langle v|A|w\rangle\langle x|\lambda\,\mathrm{i}|y\rangle\langle z|$

3.5.2 Changement de représentation

Polarisation de la lumière : Soit $\{|H\rangle, |V\rangle\}$ une base canonique de l'espace d'Hilbert qui decrit la polarisation de la lumière. Dans cette base, la représentation matricielle de ces vecteurs est :

$$|H\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \qquad |V\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

On définit : $|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|H\rangle + |V\rangle\right)$ et $|\beta\rangle = \frac{i}{2}|H\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|V\rangle$.

1. Donner la représentation matricielle de $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ et $\langle\beta|$.
2. Donner la représentation matricielle de $|\phi\rangle = \frac{1}{3}|\alpha\rangle - i\frac{\sqrt{8}}{3}|\beta\rangle$.
3. Donner la représentation matricielle de $|\alpha\rangle\langle\beta|$.

Systèmes à trois niveaux : Soit $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ une base canonique d'un espace à trois dimension. Dans cette base, la représentation matricielle de ces vecteurs est donc :

$$|1\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |2\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |3\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On définit :$|u\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |2\rangle\right)$ et $|v\rangle = \dfrac{1}{2}\left(|1\rangle - |2\rangle\right) + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|3\rangle$

1. Donner la représentation matricielle de $|u\rangle$, $\langle u|$ et $|v\rangle$.
2. Donner la représentation matricielle de $|\phi\rangle = \dfrac{1}{2}|u\rangle + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}|v\rangle$.
3. Donner la représentation matricielle de $|u\rangle\langle v|$.

3.6 Formalisme de Dirac et polarisation de la lumière

L'état de polarisation du photon peut être décrit par un élément d'un espace de Hilbert à deux dimensions $\mathcal{H}$. On considère $\{|H\rangle,|V\rangle\}$, une base orthonormale de $\mathcal{H}$. L'état $|H\rangle$ correspond à une polarisation horizontale et l'état $|V\rangle$ à une polarisation verticale. L'ensemble des états de polarisation possibles du photon peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$|\psi\rangle = a|H\rangle + b|V\rangle; \quad a,b \in \mathbb{C}.$$

1. Sachant que $|\psi\rangle$ est normalisée, montrer que tous les états de polarisation peuvent être paramétrisés à l'aide des deux angles θ et ϕ de la façon suivante :

$$|\psi(\theta,\phi)\rangle = \cos\theta|H\rangle + \sin\theta e^{i\phi}|V\rangle,$$

   où $\theta \in [0,\pi/2]$ et $\phi \in [0,2\pi]$.
2. Un polariseur orienté dans une direction qui fait un angle α avec l'horizontale est représenté par l'obervable $\hat{P}_\alpha$:

$$\hat{P}_\alpha = |\psi(\alpha,0)\rangle\langle\psi(\alpha,0)|.$$

   (a) On suppose que le photon est dans l'état $|H\rangle$ et on mesure l'observable $\hat{P}_\alpha$. Quels sont les résultats possibles de la mesure ? A quelles situations physiques correspond chacun de ces résultats ? Quelle est le probabilité d'obtenir chacun des résultats de la mesure ? Quel est l'état de polarisation du photon après la mesure ?
   (b) Déterminer la représentation matricielle de $\hat{P}_\alpha$ dans la base $\{|H\rangle,|V\rangle\}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice. Discuter vos résultats.
   (c) Le photon étant dans l'état $|H\rangle$, on mesure l'observable $\hat{P}_{\frac{\pi}{2}}$. Quel est le résultat ?

3.7 *Espérance mathématique (facultatif)*

Un train de photons identiques possédant une polarisation rectiligne faisant un angle θ avec l'axe x est envoyé sur un polariseur dont l'axe fait un angle α avec l'axe x. La détection de chaque photon transmis est une *variable aléatoire* $X_{\alpha,\theta} \in \{0,1\}$: la probabilité qu'un photon soit détecté et que la variable aléatoire prenne la valeur 1 est $p = \cos^2(\alpha - \theta)$; la probabilité qu'un photon ne soit pas détecté et que la variable aléatoire prenne la valeur 0 est $1 - p$.

1. L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X qui prend la valeur λ avec la probabilité p_λ est $\mathbb{E}[X] = \sum_\lambda \lambda\, p_\lambda$. Donner la valeur de l'espérance mathématique de $X_{\alpha,\theta}$ et lui attribuer une interprétation physique.
2. La variance d'une variable aléatoire discrète X est $\Delta[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sum_\lambda \lambda^2 p_\lambda - (\sum_\lambda \lambda p_\lambda)^2$. Donner la valeur de la variance de la variable, $\Delta[X_{\alpha,\theta}]$ et lui attribuer une interprétation physique.
3. Comment peut on utiliser la notation de Dirac pour calculer de façon simple $\mathbb{E}[X_{\alpha,\theta}]$ et $\Delta[X_{\alpha,\theta}]$?

4
TD n°4 – Systèmes à deux niveaux

On appelle système à deux niveaux, un système quantique dont les états peuvent être décrits par les vecteurs d'un espace de Hilbert de dimension 2.

4.1 Généralités

On considère un système dont le Hamiltonien peut s'écrire de la façon suivante :

$$H = H_0 + V,$$

où

$$H_0 = E_0|0\rangle\langle 0| + E_1|1\rangle\langle 1|; \quad V = W|1\rangle\langle 0| + W'|0\rangle\langle 1|$$

et $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

1. Représenter les opérateurs H_0, V et H sous forme de matrice dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
2. Montrer que E_0 et E_1 sont réels et que W' est le conjugué W^* de W.
3. On introduit les notations suivantes :

$$E_m = \frac{1}{2}(E_0 + E_1); \quad \Delta = E_1 - E_0,$$

   et on écrit H de la façon suivante

$$H = E_m \mathbb{1} + K,$$

   où $\mathbb{1}$ est l'opérateur identité sur $\mathcal{H}$ et K est un opérateur dont on donnera la représentation matricielle dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
4. Sans les calculer, montrer que les vecteurs propres de K sont les mêmes que les vecteurs propres de H.
5. Exprimer les valeurs propres $E_\pm$ de H en fonction de celles $\kappa_\pm$ de K.
6. Pourquoi peut-on choisir $E_m = 0$, sans perte de généralité ? A partir de maintenant on choisira donc $E_m = 0$.
7. Donner les expressions des valeurs propres $\kappa_\pm$ de K en fonction de Δ et $|W|$ (on prendra $\kappa_+ \geqslant 0$). En déduire l'expression des valeurs propres $E_\pm$ de H.
8. Etudier le comportement de $E_\pm$ dans les deux cas limites de couplage faible $|W| \ll |\Delta|$ et de couplage fort $|W| \gg |\Delta|$.

9. Tracer les graphes de $E_\pm$ en fonction de Δ pour un W fixé, et en fonction de $|W|$ pour Δ fixé.
10. Soient θ et φ deux angles définis de la façon suivante

$$\tan\theta = -\frac{2|W|}{\Delta} \quad \theta \in [0,\pi[; \quad W = |W|e^{i\varphi} \quad \phi \in [0,2\pi[$$

    Donner l'expression de la matrice représentant K en fonction de Δ et des angles θ et φ.
11. Donner l'expression des vecteurs propres $|\pm\rangle$ normés associés aux valeurs propres $E_\pm$ de H, dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ en fonction des angles θ et φ. On pourra introduire l'angle $\frac{\theta}{2}$ pour simplifier les expressions.
12. Etudier le comportement des vecteurs propres $|\pm\rangle$ dans les deux cas limites, de couplage faible ($|W| \ll |\Delta|$) et de couplage fort ($|W| \gg |\Delta|$).
13. Montrer que ces vecteurs propres peuvent être représentés sur une sphère de Bloch (concept défini au TD précédent). Où se trouvent les vecteurs propres dans la limite du couplage fort ? Même question pour la limite du couplage faible.

4.2 Mesure quantique sur un système à deux niveaux

On considère un système quantique décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension 2. On considère deux observables : le Hamiltonien H et une autre notée A. La représentation matricielle de H et A dans une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ s'écrit :

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où E_0 et a sont deux paramètres réels positifs.

1. On suppose que le système est dans l'état :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$

    Si l'on mesure A, quel résultat est-on certain d'obtenir ? Quel est l'état $|\psi_1\rangle$ du système juste après la mesure ?
2. Si l'on mesure l'énergie juste après la mesure de A (sachant que le système est maintenant dans $|\psi_1\rangle$), quelles sont les probabilités d'obtenir comme résultat les valeurs E_0 et $-E_0$?
3. Supposons que le résultat de la mesure précédente soit E_0. Dans quel état, noté $|\psi_2\rangle$, se trouve le système après la mesure ?
4. Si l'on poursuit par une mesure de A (le système étant alors dans $|\psi_2\rangle$), quelles sont les probabilités d'obtenir a et $-a$?
5. Conclure quant à l'effet d'une mesure de l'énergie sur le système, sachant qu'initialement on était certain du résultat de la mesure de A.

4.3 La molécule d'ammoniac

La molécule d'ammoniac est constituée de 3 atomes d'hydrogène et d'un atome d'azote. Elle peut émettre des photons dans le domaine micro-onde, à une longueur d'onde $\lambda = 1.25$cm. Ce phénomène physique est à la base du maser [1] à ammoniac. Cet exercice propose de relier les propriétés de ce photon à la structure géométrique de la molécule grâce à un modèle simplifié mettant en oeuvre le formalisme du système à deux niveaux en mécanique quantique.

1. MASER : Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation

4.3.1 Symétrie par réflexion

Dans une vision semi-classique, les atomes de la molécule s'organisent autour de configurations géométriques stables dans lesquelles les 3 atomes d'hydrogène forment un triangle équilatéral et l'atome d'azote est situé sur la droite orthogonale au plan du triangle et passant par le centre de ce dernier. La molécule peut donc se trouver dans deux états quantiques possibles, notés $|L\rangle$ et $|R\rangle$, correspondant aux deux positions symétriques de l'atome d'azote de part et d'autre du plan des atomes d'hydrogène.

On supposera que les états $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ forment une base orthonormée. Dans l'espace de Hilbert engendré par cette base, le Hamiltonien de la molécule s'exprime de la façon suivante :

$$H = E_0|L\rangle\langle L| + E_1|R\rangle\langle R| + W|L\rangle\langle R| + W^*|R\rangle\langle L|$$

où $E_0, E_1 \in \mathbb{R}$ et $W \in \mathbb{C}$.

1. Soit T l'opérateur décrivant la réflexion par rapport au plan des atomes d'hydrogène. Donner l'expression matricielle de T dans la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$.
2. L'énergie de la molécule étant invariante par cette opération de symétrie, en déduire des contraintes sur les valeurs de E_0, E_1 et W. Indice : on pourra considérer la valeur moyenne de H associée à un état $|\psi\rangle$ quelconque, et écrire qu'elle doit être égale à la valeur moyenne de H associée à $T|\psi\rangle$.
3. Montrer qu'on peut donc considérer que la représentation matricielle de H est de la forme :
$$H = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$
où $W \in \mathbb{R}$.
4. Déterminer les expressions des vecteurs propres $|+\rangle$ et $|-\rangle$ de H dans la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ ainsi que les valeurs propres associées $E_\pm$ de H.
5. Quelle est l'action de l'opérateur T sur les vecteurs $|+\rangle$ et $|-\rangle$? Quel est le lien entre cette propriété et la contrainte dérivée au point 2 ci-dessus ?
6. La molécule d'ammoniac peut émettre un photon lorsqu'elle passe de l'état $|+\rangle$ à l'état $|-\rangle$. C'est cette transition qui est responsable

de l'émission d'un maser à ammoniac. On admet que la fréquence du photon est reliée à la différence d'énergie entre les deux états par la formule de Bohr :

$$h\nu_{\text{photon}} = E_+ - E_- \tag{4.2}$$

Calculer la fréquence correspondante et en déduire la valeur de W en eV (on rappelle que $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J.s).

4.3.2 Evolution temporelle

On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$, la molécule d'ammoniac a été préparée dans l'état $|L\rangle$. On note $|\psi(t)\rangle$ l'état de la molécule à l'instant $t \geqslant 0$.

1. Donner l'expression de $|\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, puis dans la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$.
2. Donner l'expression de la probabilité $P(t)$ de mesurer la molécule dans l'état $|L\rangle$ à l'instant $t > 0$. On précisera l'observable qui est mesurée.

5

TD n°5 – Interaction dipolaire de deux atomes à 2 niveaux

On considère deux atomes, A et B, décrits chacun par leur deux états de plus basses énergies. Les états quantiques de l'atome A seront décrits par les vecteurs de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{(A)}$ et ceux de l'atome B par les vecteurs de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{(B)}$. Les espaces de Hilbert $\mathcal{H}^{(A)}$ et $\mathcal{H}^{(B)}$ sont de dimension 2. On note $\hat{H}^{(A)}$ et $\hat{H}^{(B)}$ les Hamiltoniens des atomes A et B respectivement.

$$\hat{H}^{(i)} = E_g^{(i)} |g\rangle_i \, {}_i\langle g| + E_e^{(i)} |e\rangle_i \, {}_i\langle e|; \quad i = A,B$$

où $\{|g\rangle_i, |e\rangle_i\}$, est la base orthonormée formée par les deux états de plus basses énergie de l'atome i ($i = A,B$). $E_g^{(i)}$ est l'énergie de l'état fondamental de l'atome i et $E_e^{(i)}$ l'énergie de son premier état excité. On suppose que les deux atomes ont les même niveaux d'énergie, ce qui se traduit par $E_g^{(A)} = E_g^{(B)}$ et $E_e^{(A)} = E_e^{(B)}$. On considère le système quantique S constitué des deux atomes A et B.

1. Déterminer l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ permettant de décrire les états de S. Quelle est sa dimension ? On donnera une base orthonormée de cet espace.
2. On considère que les deux atomes sont assez éloignés l'un de l'autre pour que l'on puisse négliger leurs interactions mutuelles. Donner l'expression du Hamiltonien $\hat{H}_0$ de S.
3. On considère maintenant que les deux atomes interagissent entre eux. Le Hamiltonien $\hat{H}$ de S est maintenant $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, où $\hat{V}$ s'écrit de la façon suivante :

   $$\hat{V} = V\left(\hat{D}_A^\dagger \hat{D}_B + \hat{D}_A \hat{D}_B^\dagger\right),$$

   avec $\hat{D}_A = |g\rangle_A \, {}_A\langle e| \otimes \mathbb{1}_B$ et $\hat{D}_B = \mathbb{1}_A \otimes |g\rangle_B \, {}_B\langle e|$, où on a noté $\mathbb{1}_i$ l'opérateur identité dans $\mathcal{H}^{(i)}$, ($i = A,B$) et $V \in \mathbb{R}$.

   L'opérateur $\hat{V}$ est une modélisation simplifiée de l'interaction dipolaire entre les deux atomes.

   (a) Écrire la matrice représentant $\hat{H}$ dans la base orthonormée de $\mathcal{H}$ déterminée à la question 1.

   (b) En déduire les niveaux d'énergie de S et les vecteurs propres associés.

4. Sans passer par l'écriture matricielle de $\hat{H}$, on aurait pu raisonner de la façon suivante. Soit $\hat{N}$, l'opérateur défini par l'expression suivante :
$$\hat{N} = \hat{D}_A^\dagger \hat{D}_A + \hat{D}_B^\dagger \hat{D}_B.$$
   (a) Donner les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $\hat{N}$.
   (b) Proposer une signification physique pour $\hat{N}$?
   (c) Montrer que $[\hat{H},\hat{N}] = 0$. Quelle est la signification de cette relation ?
   (d) Retrouver ainsi qu'il suffit de diagonaliser une matrice 2×2 pour obtenir les énergies et les états correspondants de S.
5. Parmi les états propres de $\hat{H}$, identifier les états qui sont séparables et les états qui sont intriqués.

6
TD n°6– Commutation des observables et symétries

6.1 Commutation

Soit A, B et C trois opérateurs agissant dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

1. Démontrer les propriétés $\left[A+B,C\right] = \left[A,C\right] + \left[B,C\right]$ et $\left[AB,C\right] = A\left[B,C\right] + \left[A,C\right]B$.
2. On sait déjà que si deux observables A et B commutent, elles sont simultanément diagonalisables. Montrer également que si $\left[A,B\right] \neq 0$ elles ne peuvent pas partager un ensemble complet de vecteurs propres communs.
3. On considère les observables position $X = x$ et impulsion $P = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ dans la représentation des positions. Calculer le commutateur généralisé $\left[X^n,P\right]$.
4. Montrer que si $\left[A,B\right] = 0$, on a aussi $\left[\exp\left(-iA\right),B\right] = 0$. Quelles sont les conséquences pour l'observable B, quand A est le Hamiltonien H ?
5. *(facultatif)*. La relation usuelle $e^{a+b} = e^a e^b$, valable pour les nombres complexes, est fausse en général pour des opérateurs A et B non-commutants. Montrer qu'ils vérifient l'*identité de Glauber* :

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{6.1}$$

lorsqu'ils vérifient $\left[A,\left[A,B\right]\right] = \left[B,\left[A,B\right]\right] = 0$. Cette identité n'est qu'un cas particulier de la formule générale de Baker, Cammpbell et Haussdorff (*formule BCH*).

6.2 Symétries et loi de conservation

6.2.1 Transformations

Définition : effectuer une transformation $\mathcal{T}$ sur un système physique, c'est remplacer chacune de ses variables par une nouvelle variable, chacun de ses états par un nouvel état, tout en conservant les propriétés physiques du système.

On considère maintenant un système quantique dans un état $|\psi\rangle$ appartenant à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimension n. Soit A une observable du système.

1. À quelle condition $\{A\}$ est-il un ensemble *complet* d'observables qui commutent (ECOC) ?

   On supposera cette condition vérifiée, et on notera $|\varphi_1\rangle, \ldots, |\varphi_n\rangle$ les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $a_1, \ldots, a_n$, respectivement. On peut décrire chaque transformation $\mathcal{T}$ du système physique à l'aide d'un opérateur T agissant dans $\mathcal{H}$.
2. On note $|\psi'\rangle = T|\psi\rangle$ l'action de la transformation $\mathcal{T}$ sur les états du système. Donner l'expression de la probabilité p'_i d'observer le système décrit par $|\psi'\rangle$ dans l'état $|\varphi'_i\rangle$, et la confronter avec la probabilité p_i d'observer le système décrit par $|\psi\rangle$ dans l'état $|\varphi_i\rangle$.
3. Selon notre définition, $\mathcal{T}$ conserve les propriétés physiques du système. Quelle condition sur T peut-on en déduire ?
4. $\mathcal{T}$ agit également sur les observables. En déduire l'expression de A' en fonction de A et T [1].
5. On dit que l'observable A est *invariante* sous la transformation $\mathcal{T}$ si $A' = A$. Montrer que dans ce cas $[A,T] = 0$.

1. Suggestion : comme $\mathcal{T}$ conserve les propriétés physiques, elle doit conserver la valeur moyenne des observables.

6.2.2 Groupe de transformation

1. Considérons un groupe continu de transformations $\mathcal{T}(a)$ paramétrées par une variable réelle a, avec $\mathcal{T}(0) = I$. Sous certaines conditions [2] , on peut écrire l'expression d'une transformation infinitésimale
$$T(\epsilon) = I - i\epsilon G + \ldots \tag{6.2}$$
   où on négligera les termes d'ordre $o(\epsilon)$.

   Montrer que G est hermitien : $G = G^\dagger$
2. En utilisant le résultat du point 4 ci-dessus, montrer que
$$A' = A - i\epsilon[G,A] + \cdots$$
3. L'opérateur $g = -iG$ est appelé le générateur du groupe des transformations $T(a)$. Montrer que
$$g = T'(0),$$
   où on a défini la dérivée de $T(a)$ par rapport au paramètre a :
$$T'(a) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T(x)\bigg|_{x=a}.$$
4. Montrer que
$$g = T(a)^{-1}T'(a) = T'(a)T(a)^{-1}.$$
5. Et que finalement :
$$T(a) = e^{-iaG}.$$

2. $\mathcal{T}(a)$ est un groupe de transformation si $\mathcal{T}(a)\mathcal{T}(b) = \mathcal{T}(a+b)$ et $\mathcal{T}^{-1}(a) = \mathcal{T}(-a)$. On peut aussi introduire une topologie sur les éléments $T(a)$ qui permet d'introduire la notion de limite $\lim_{a\to b}\mathcal{T}(a)$ et donc la notion de continuité de $\mathcal{T}(a)$ par rapport au paramètre a. On peut ensuite définir la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathcal{T}(x)\Big|_{x=a} = \lim_{h\to 0}\frac{\mathcal{T}(a+h)-\mathcal{T}(a)}{h}$.

6.2.3 Exemple : groupe des translations

Considérons à présent la translation infinitésimale d'une quantité a le long de l'axe x. L'opérateur correspondant est noté $T(a)$. Soit $|x\rangle$ un vecteur propre de l'opérateur position X (c'est-à-dire $X|x\rangle = x|x\rangle$). On a par définition : $|x'\rangle = T(a)|x\rangle \equiv |x+a\rangle$.

1. Montrer que $T^{-1}(a) = T^{\dagger}(a) = T(-a)$.
2. Vérifier que $X' = X - aI$, en comparant l'action de X' et de X sur $|x\rangle$.
3. On note G l'opérateur hermitien associé à $\mathcal{T}$ (eq. 6.2). En appliquant le résultat du point 6.2.2.2, en déduire que $G = P/\hbar$ — où P est l'opérateur impulsion.
4. Montrer que pour un système constitué d'une particule libre, le Hamiltonien est invariant par translation. Dans ce cas, vérifier que $\forall a$:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle\psi(t)|T(a)|\psi(t)\rangle = 0. \tag{6.3}$$
5. En déduire que l'impulsion est une constante du mouvement.

7
TD n° 7 – Oscillateur harmonique et états cohérents

7.1 Quelques rappels sur l'oscillateur harmonique

On considère tout d'abord un oscillateur harmonique classique, d'énergie :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad .$$

1. Ecrire l'énergie E en termes des variables sans dimension
$$X_{cl} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x \quad ; \quad P_{cl} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}mv \quad .$$
2. Ecrire le système d'équations différentielles couplées du premier ordre régissant l'évolution de X_{cl} et P_{cl}.
3. On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_{cl} + iP_{cl})$. Ecrire l'énergie en fonction de cette variable. Ecrire l'équation du mouvement associée à α, et la résoudre.
4. Quelle est la densité de probabilité de présence en un point x lorsque le système est dans son état d'énergie minimale ? Comparer ce résultat à la situation de l'oscillateur harmonique quantique décrite en cours.

7.2 Etats cohérents

On considère maintenant le cas de l'oscillateur harmonique quantique.

1. Rappeler l'expression des opérateurs de création et d'annihilation $(\hat{a}^\dagger, \hat{a})$ en termes des opérateurs sans dimension :
$$\hat{X} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\hat{p} \quad ,$$
ainsi que l'expression du Hamiltonien en fonction de ces opérateurs.
2. En utilisant le théorème d'Ehrenfest, écrire les équations différentielles vérifiées par $\langle\hat{X}\rangle(t)$, $\langle\hat{P}\rangle(t)$ et $\langle\hat{a}\rangle(t)$. Comparer avec le cas classique.

7.2.1 Définition des états cohérents

On définit un état cohérent comme un état propre (normé à 1) de l'opérateur d'annihilation

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad .$$

3. Donner l'expression de $|\alpha\rangle$ dans la base des états propres du Hamiltonien $\{|n\rangle\}$ en fonction de α (on choisira la phase de telle façon que $\langle 0|\alpha\rangle$ soit un réel positif).
4. En déduire que si le système est initialement préparé dans un état cohérent $|\alpha_0\rangle$, il reste à tout instant ultérieur dans un état cohérent que l'on déterminera.

7.2.2 Quelques propriétés des états cohérents

5. On suppose que le système est dans l'état $|\alpha_0\rangle$ à l'instant $t = 0$. Calculer les quantités suivantes : $\langle\hat{X}\rangle(t)$, $\langle\hat{P}\rangle(t)$ et le produit $\Delta X \Delta P$.
6. On mesure l'énergie du système. Quels sont les résultats possibles et les probabilités associées ? Calculer la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de $\hat{N}$ et de $\hat{H}$.
7. Dans quelle limite sur α les états cohérents permettent-ils de retrouver des résultats classiques ? On considère un pendule tel que $l = 20$ cm et $m = 20$ g lâché sans vitesse initiale d'un angle $\theta = \dfrac{\pi}{10}$. En supposant que l'on puisse décrire ce système à l'aide d'un état cohérent, calculer la valeur de $|\alpha|$ et conclure.
8. Ecrire l'équation qui définit les états cohérents en représentation position. Résoudre cette équation, et montrer en particulier que la fonction d'onde d'un état cohérent est une gaussienne.
9. Discuter l'évolution d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ en représentation position.

8

TD n°8 – Moment cinétique

8.1 Précession d'un spin dans un champ magnétique uniforme et constant

On considère une particule non chargée de spin 1/2 soumise à un champ magnétique uniforme et constant. On note $\vec{S}$ l'opérateur vectoriel de spin.

8.1.1 Préliminaires

1. Soit le vecteur unitaire $\vec{u}$ pointant dans la direction spécifiée par les angles (θ, ϕ) des coordonnées sphériques. Calculer la matrice représentant l'opérateur $S_{\vec{u}} = \vec{u} \cdot \vec{S}$ dans la base des vecteurs propres de l'opérateur S_z.
2. Calculer $S_{\vec{u}}^2$.
3. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de $S_{\vec{u}}$, notés $|\vec{u},+\rangle$ et $|\vec{u},-\rangle$ dans la base des vecteurs propres de S_z. Ces derniers seront notés plus simplement : $|+\rangle = |\vec{u}_z,+\rangle$ et $|-\rangle = |\vec{u}_z,-\rangle$.
4. Calculer les valeurs moyennes des trois composantes du spin et montrer que :
$$\langle \vec{S} \rangle_{|\vec{u},+\rangle} = \frac{\hbar}{2}\vec{u}.$$
5. Soit $\vec{v}$ un autre vecteur unitaire. On note $\Delta S_{\vec{v},|\vec{u},+\rangle}$ la grandeur suivante :
$$\Delta S_{\vec{v},|\vec{u},+\rangle} = \sqrt{\langle S_{\vec{v}}^2 \rangle_{|\vec{u},+\rangle} - \langle S_{\vec{v}} \rangle_{|\vec{u},+\rangle}^2}.$$
Calculer $\Delta S_{\vec{v},|\vec{u},+\rangle}$ en fonction du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Pour quelle direction $\vec{u}$, les fluctuations de la composante $S_{\vec{v}}$ du spin, dans l'état $|\vec{u},+\rangle$, sont-elles maximales ?

8.1.2 Evolution temporelle

L'énergie d'un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est :
$$H = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}.$$
Le moment magnétique est proportionnel au spin :
$$\vec{\mathcal{M}} = \gamma \vec{S}$$

où γ est appelé le facteur gyromagnétique. On choisit l'axe Oz dans la direction de $\vec{B}$, soit : $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

1. Ecrire le Hamiltonien (on introduira la pulsation de Larmor $\omega = \gamma B$). A quelle transformation (géométrique) correspond l'opérateur d'évolution temporelle $U(t)$ défini par

$$U(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}\,t\right)?$$

2. A l'instant $t = 0$ l'état de spin est $|\psi(t=0)\rangle = |\vec{u},+\rangle$. Calculer l'état $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t > 0$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ des états propres de S_z.
3. Montrer que $|\psi(t)\rangle$ peut être écrit de la façon suivante :

$$|\psi(t)\rangle = |\vec{u}(t),+\rangle,$$

   où $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire l'on précisera.
4. Quel est le mouvement du vecteur $\langle\vec{S}\rangle_{\psi(t)}$? Préciser la période T du mouvement.
5. Comparer $|\psi(t)\rangle$ avec $|\psi(t+T)\rangle$ et $|\psi(t+2T)\rangle$.

8.2 *Particule dans un potentiel central*

On considère une particule de masse μ dans un champ de force central. C'est à dire que son énergie potentielle $V(r)$ ne dépend que de sa distance $r = \|\vec{r}\|$ à un point fixe O, que l'on prend comme origine des coordonnées.

1. Donner l'expression du Hamiltonien H de la particule. On notera $\vec{r}$ le vecteur position repérant la particule.
2. On rappelle que le laplacien $\Delta_{\vec{r}}$ en coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) s'écrit de la façon suivante :

$$\Delta_{\vec{r}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2},$$

   où $r = \|\vec{r}\|$ et $\vec{L}$ est l'opérateur moment cinétique orbital de la particule. Rappeler la définition de $\vec{L}$ en fonction des opérateurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$.
3. On note $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ les fonctions propres communes de L^2 et L_z. Rappeler les valeurs propres de L^2 et L_z, en fonction de ℓ et m. On précisera les valeurs possibles que peuvent prendre ℓ et m.
4. Rappeler les relations de commutation entre les 3 opérateurs correspondant aux 3 composantes cartésiennes du moment cinétique orbital L_x, L_y et L_z ; ainsi que les relations de commutation des composantes de $\vec{L}$ avec L^2.
5. Montrer que les fonctions propres de H peuvent être choisies fonctions propres d'une des composantes de L, disons L_z et fonctions propre de L^2. En déduire que les fonctions propres de H en représentation position peuvent s'écrire comme le produit d'une fonction radiale $R(r)$ et d'une fonction angulaire $g(\theta,\phi)$.

6. De la valeur du commutateur $[H,L_i]$ en déduire que les valeurs propres de H ne dépendent pas de m. Pour cela on pourra introduire les opérateurs L_+ et L_- définis par $L_\pm = L_x \pm iL_y$.
7. On notera E_{nlm} les valeurs propres de H et $\Psi_{nlm}(r,\theta,\phi) = f_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\phi)$ les fonctions propres correspondantes. Donner l'équation vérifiée par $f_{nl}(r)$. En particulier, on montrera que $f_{nl}(r)$ ne dépend pas de m.
8. On veut déterminer la signification des relations de commutation entre $L_i(i = x,y,z)$ et H en termes de symétrie. Pour cela, on répondra aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la signification physique des opérateurs $U_i(\alpha) = \exp(-iL_i\alpha/\hbar)$? où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $i = x,y,z$.
   (b) Quel est la signification géométrique de $U_i(\alpha)HU_i^{-1}(\alpha)$?
   (c) Pour $\alpha \ll 1$, écrire $U_i(\alpha)HU_i^{-1}(\alpha)$ au premier ordre en α, en fonction de $[L_i,H]$.
   (d) Conclure sur la signification des relations de commutation entre $L_i(i = x,y,z)$ et H en terme de symétrie.