$u\sigma_i u^\dagger = \sigma_i$. Le calcul direct (facile) montre qu'il n'y a que deux solutions dans SU(2) : $u = \mathcal{I}d_2$ et $u = -\mathcal{I}d_2$. Donc :

$$\mathrm{Ker}\, R = \{\mathcal{I}d_2, -\mathcal{I}d_2\} \cong \mathbb{Z}_2\,.$$

où $\mathbb{Z}_2$ est le groupe a deux éléments $\{1, -1\}$ (et je rappelle que $\cong$ signifie isomorphe à). En utilisant le théorème de l'isomorphisme on conclut que SO(3) est isomorphe au groupe quotient de SU(2) par $\mathbb{Z}_2$, ce qui s'écrit :

Conclusion : SO(3) $\cong$ SU(2)/ $\mathbb{Z}_2$: SO(3) est "presque" isomorphe à SU(2).

Remarque 1 Revenons sur l'exemple des éléments u_φ où une "rotation de 2π" avec SU(2) ne redonne pas l'identité. Dire que SO(3) $\cong$ SU(2)/ Ker$R$ avec $\mathrm{Ker}\, R = \{\mathcal{I}d_2, -\mathcal{I}d_2\}$, signifie qu'une rotation "réelle" de SO(3) n'est définie à partir de SU(2) que "modulo Ker R" : il n'y a pas de paradoxe, juste l'absence d'une correspondance "one to one".

Remarque 2 Le fait que SO(3) et SU(2) ne soient pas complètement isomorphes a des contreparties en termes topologiques[2] : SU(2) est simplement connexe[3], SO(3) ne l'est pas. En terme de topologie, on dit que SU(2) est "un revêtement universel" de SO(3).

M.3 L'algèbre $\mathfrak{su}(2)$

L'algèbre de Lie du groupe SU(2) est notée $\mathfrak{su}(2)$[4]. Cette algèbre possède 3 générateurs notés J_i avec $i = 1, 2, 3$ que l'on peut obtenir à partir du paramétrage des éléments $u \in SU(2)$ en $(\theta_1, \theta_2, \varphi)$ du début par :

$$J_3 = -i \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\vec{0}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ J_1 = -i \left.\frac{\partial u}{\partial \theta_1}\right|_{\vec{0}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_2 = -i \left.\frac{\partial u}{\partial \theta_2}\right|_{\vec{0}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

[Je prends la définition des générateurs du physicien dans laquelle figure le "$-i$"]. On retrouve bien sûr les $J_k = (1/2)\sigma_k$ qui vérifient les relations de commutation :

$$[J_1, J_2] = iJ_3, \tag{M.3}$$
$$[J_2, J_3] = iJ_1, \tag{M.4}$$
$$[J_3, J_1] = iJ_2, \tag{M.5}$$

On peut écrire ces relations en une seule formule :

$$[J_k, J_l] = i \sum_m \epsilon_{k,l,m} J_m$$

où $\epsilon_{k,l,m}$ est le symbole de Levi-Civita.

M.4 Les IUR de SU(2)

On cherche maintenant toutes les manières irréductibles de représenter les générateurs J_k par des opérateurs **hermitiens** agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Le cas précédent $J_k = (1/2)\sigma_k$ en est un exemple (en fait le plus simple). Pour cela on commence par chercher les opérateurs de Casimir de l'algèbre. Le **seul** opérateur de Casimir C (à une constante multiplicative près, bien sûr!!) est

$$C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

2. Si les deux groupes étaient exactement isomorphes ils auraient exactement la même topologie.
3. Rappel : dire que SU(2) est simplement connexe signifie que tout chemin fermé dans SU(2) est continument réductible à un point.
4. Je rappelle qu'en maths on a l'habitude de noter avec des lettres minuscules l'algèbre de Lie et avec des majuscules le groupe de Lie correspondant.

que l'on note $C = \vec{J}^2$ en mécanique quantique.
La recherche des représentations unitaires irréductibles commence par l'étude des espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ sur lesquels on a $\boxed{C = \lambda \mathcal{I}d_{\mathcal{H}}}$.

Premières Conséquences

Comme les J_i sont des opérateurs hermitiens, leur spectre est constitué de valeurs réelles, et donc les opérateurs J_i^2 sont positifs. Il en résulte que l'on doit avoir $\lambda \geq 0$.
Par ailleurs une fois λ fixé on doit avoir $\langle\psi|J_i^2|\psi\rangle \leq \lambda$, ce qui implique que les valeurs propres des J_i ne peuvent que se trouver dans l'intervalle $[-\sqrt{\lambda}, +\sqrt{\lambda}]$, donc dans un intervalle borné.

M.4.1 Recherche des IUR

Le cadre algébrique

On introduit les opérateurs $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ (les opérateurs "d'échelle" ou "ladder operators") qui vont permettre de constrIURe une base d'états propres de J_3. [Comme J_1 et J_2 sont supposés hermitiens on a $(J_-)^\dagger = J_+$]. Les relations de commutations initiales se réécrivent :

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \tag{M.6}$$
$$[J_-, J_+] = -2J_3 \tag{M.7}$$

On en déduit que :

$$C = J_3^2 - J_3 + J_+J_- = J_3^2 + J_3 + J_-J_+ \tag{M.8}$$

Si on suppose que $C = \lambda\, \mathcal{I}d_{\mathcal{H}}$ on en déduit que

$$J_3^2 - J_3 = \lambda\, \mathcal{I}d_{\mathcal{H}} - J_+J_- \tag{M.9}$$
$$J_3^2 + J_3 = \lambda\, \mathcal{I}d_{\mathcal{H}} - J_-J_+ \tag{M.10}$$

Par ailleurs comme J_3 est hermitien il a un spectre de valeurs propres réelles. En général ce spectre pourrait ne pas être discret, évitons cette hypothèse (trop délicate à analyser ici) et admettons que nous nous restreignons au cas où J_3 admet une base de vecteurs propres de $\mathcal{H}$.[5] En fait on peut encore affaiblir cette hypothèse :

Hypothèse Fondamentale

Nous supposons que J_3 a au moins un vecteur propre (donc non nul) dans $\mathcal{H}$, soit qu'il existe un $|\phi_0\rangle \in \mathcal{H}$ (normalisé) tel que $J_3|\phi_0\rangle = \lambda_0|\phi_0\rangle$.

Le raisonnement

Il s'agit d'un pur raisonnement d'algèbre linéaire...juste un peu long. J'ai essayé d'en dégager les points importants par étape.
D'après la relation (M.6) appliqué au vecteur $|\phi_0\rangle$ on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_3((J_-)^n|\phi_0\rangle) = (\lambda_0 - n)(J_-)^n|\phi_0\rangle \tag{M.11}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_3((J_+)^n|\phi_0\rangle) = (\lambda_0 + n)(J_+)^n|\phi_0\rangle \tag{M.12}$$

Maintenant nous allons faire deux raisonnements par l'absurde.
• Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier n tel que $(J_-)^n|\phi_0\rangle = 0$, alors la relation précédente (M.11) montre que J_3 pourrait avoir des valeurs propres aussi négatives que l'on veut, donc non-bornées,

5. Dans le cas d'un spectre continu les "vecteurs propres" (comme les kets "$|x\rangle$" pour l'opérateur position) ne sont pas normalisables et donc ne sont pas en fait des éléments de $\mathcal{H}$. Mais ces vecteurs existent bien dans un espace vectoriel plus grand que $\mathcal{H}$, mais qui n'est pas un espace de Hilbert.

ce qui est impossible, donc il existe au moins un $n_0 \neq 0$ tel que $(J_-)^{n_0}|\phi_0\rangle = 0$.
Appelons $\bar{n}$ le plus petit de ces entiers n_0 non nuls, c'est à dire que l'on a $(J_-)^{\bar{n}}|\phi_0\rangle = 0$ et aussi $(J_-)^{\bar{n}-1}|\phi_0\rangle \neq 0$. Appelons $|\psi_-\rangle$ le vecteur $(J_-)^{\bar{n}-1}|\phi_0\rangle$ après normalisation. Ce vecteur vérifie $J_-|\psi_-\rangle = 0$. S'il existait plusieurs vecteurs linéairement indépendants vérifiant la même relation, on montrerait que la représentation est réductible, donc on peut conclure que la dimension du noyau de J_- est 1, soit $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, J_-) = 1$.
• De même supposons par l'absurde qu'il n'existe pas d'entier m tel que $(J_+)^m|\phi_0\rangle = 0$, alors la relation précédente (M.12) montre que J_3 pourrait avoir des valeurs propres aussi positives que l'on veut, donc non-bornées, ce qui est impossible, donc il existe au moins un $m_0 \neq 0$ tel que $(J_+)^{m_0}|\phi_0\rangle = 0$.
Appelons $\bar{m}$ le plus petit de ces entiers m_0 non nuls, c'est à dire que l'on a $(J_+)^{\bar{m}}|\phi_0\rangle = 0$ et aussi $(J_+)^{\bar{m}-1}|\phi_0\rangle \neq 0$. Appelons $|\psi_+\rangle$ le vecteur $(J_+)^{\bar{m}-1}|\phi_0\rangle$ après normalisation. Ce vecteur vérifie $J_+|\psi_+\rangle = 0$. S'il existait plusieurs vecteurs linéairement indépendants vérifiant la même relation, on montrerait que la représentation est réductible, donc on peut conclure que la dimension du noyau de J_+ est 1, soit $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, J_+) = 1$.

Conclusion de la première étape

Il existe deux vecteurs (normalisés) de $\mathcal{H}$, notés $|\psi_\pm\rangle$ tels que $J_\pm|\psi_\pm\rangle = 0$. Par ailleurs $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, J_-) = 1$ et $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, J_+) = 1$.

• En utilisant maintenant de nouveau les relations de commutation (M.6) mais appliquées cette fois aux vecteurs $|\psi_\pm\rangle$ on déduit que :

$$J_\pm(J_3|\psi_\pm\rangle) = 0$$

Mais d'après ce qui précède on a $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, J_\pm) = 1$, donc on en déduit qu'il existe deux constantes $j_\pm$ telles que :

$$J_3|\psi_\pm\rangle = j_\pm|\psi_\pm\rangle\,. \tag{M.13}$$

Donc les vecteurs $|\psi_\pm\rangle$ sont vecteurs propres de J_3 avec $j_\pm$ comme valeurs propres, donc $j_\pm \in \mathbb{R}$. Si l'on calcule les valeurs moyennes des relations (M.9) et (M.10) sur les états $|\psi_\pm\rangle$ en tenant compte que $J_\pm|\psi_\pm\rangle = 0$ on obtient :

$$\langle\psi_-|J_3^2 - J_3|\psi_-\rangle = j_-^2 - j_- = \lambda \tag{M.14}$$
$$\langle\psi_+|J_3^2 + J_3|\psi_+\rangle = j_+^2 + j_+ = \lambda \tag{M.15}$$

On déduit de $j_-^2 - j_- = j_+^2 + j_+$ que :

Conclusion de la deuxième étape

$$J_3|\psi_\pm\rangle = j_\pm|\psi_\pm\rangle, \quad \text{de plus} \quad j_- = -j_+ \quad \text{ou} \quad j_- = j_+ + 1 \tag{M.16}$$

• Par ailleurs Il résulte de (M.13) que les vecteurs $|\psi_\pm\rangle$ sont deux vecteurs du type du vecteur $|\phi_0\rangle$ utilisé précédemment dans (M.11) et (M.12). Donc on peut reprendre ces équations et on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_3((J_-)^n|\psi_+\rangle) = (j_+ - n)(J_-)^n|\psi_+\rangle \tag{M.17}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_3((J_+)^n|\psi_-\rangle) = (j_- + n)(J_+)^n|\psi_-\rangle \tag{M.18}$$

Les raisonnements par l'absurde faits plus haut s'appliquent donc ici à $|\psi_\pm\rangle$. On en déduit qu'il existe deux entiers $n_\pm \geq 0$ tels que :

$$(J_-)^{n_-}|\psi_+\rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad (J_-)^{n_-+1}|\psi_+\rangle = 0 \tag{M.19}$$
$$(J_+)^{n_+}|\psi_-\rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad (J_+)^{n_++1}|\psi_-\rangle = 0 \tag{M.20}$$

Donc : $(J_-)^{n_-}|\psi_+\rangle \in \mathrm{Ker}J_-$ et $(J_+)^{n_+}|\psi_-\rangle \in \mathrm{Ker}J_+$. Mais du fait que $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, J_\pm) = 1$ on a donc :

$$(J_-)^{n_-}|\psi_+\rangle = Z_-|\psi_-\rangle \quad \text{et} \quad (J_+)^{n_+}|\psi_-\rangle = Z_+|\psi_+\rangle \tag{M.21}$$

où $Z_\pm \in \mathbb{C}^*$. Il en résulte que l'on peut éliminer $|\psi_+\rangle$ (par exemple) comme inconnue, en écrivant :

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{Z_+}(J_+)^{n_+}|\psi_-\rangle \tag{M.22}$$

En appliquant J_3 à droite et à gauche et en utilisant (M.17) et (M.18) on trouve :

$$j_+|\psi_+\rangle = (j_- + n_+)\frac{1}{Z_+}(J_+)^{n_+}|\psi_-\rangle = (j_- + n_+)|\psi_+\rangle\,. \tag{M.23}$$

On trouve de façon similaire $j_-|\psi_-\rangle = (j_+ - n_-)\frac{1}{Z_-}(J_-)^{n_-}|\psi_+\rangle = (j_+ - n_-)|\psi_-\rangle$. On en déduit :

Conclusion de la troisième étape

$$j_+ - j_- = n_+ = n_- \in \mathbb{N}\,. \tag{M.24}$$

Récapitulation des résultats obtenus

On peut maintenant rassembler les résultats pour conclure.
De l'équation (M.24) on déduit que l'on a $j_+ \geq j_-$. L'équation (M.16) nous dit alors que la seule possibilité est $j_- = -j_+$ avec $j_+ \geq 0$. A partir de maintenant notons $j \geq 0$ à la place de j_+. D'après ce qui précède (équations (M.14), (M.16), (M.24)) on a :

$$j_\pm = \pm j, \quad j_+ - j_- = 2j = n_\pm \in \mathbb{N}, \quad \lambda = j(j+1)$$

Les vecteurs propres de J_3 sont donnés par (M.18) sous la forme :

$$\forall n \in \{0, 1, ...2j\},\ J_3((J_+)^n|\psi_-\rangle) = (-j+n)(J_+)^n|\psi_-\rangle$$

Les vecteurs $|\phi_n\rangle = (J_+)^n|\psi_-\rangle$ pour $n \in \{0, 1, ...2j\}$ (après normalisation) constituent la base de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_j$ de représentation irréductible. La dimension de cet espace est donc $2j+1$. On peut retrouver facilement par une relation de récurrence la norme des vecteurs $|\phi_n\rangle$. Sachant que $J_+|\phi_n\rangle = |\phi_{n+1}\rangle$ on peut également retrouver l'action de l'opérateur J_+ et également celle de $J_- = (J_+)^\dagger$. Il faut noter que la convention de mécanique quantique est d'indexer les vecteurs de base non pas par "n", mais par les valeurs propres de J_3, c'est-à-dire en utilisant $m = -j + n$.

Conclusion

Le paramèttre λ de représentation irréductible doit être de la forme $\lambda = j(j+1)$ (je rappelle qu'ici $\hbar = 1$) où $2j \in \mathbb{N}$. L'étude algébrique aboutit au résultat suivant :
- La dimension de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_j$ de représentation unitaire irréductible (IUR) est telle que $\mathrm{Dim}(\mathcal{H}_j) = 2j+1$.
- L'espace $\mathcal{H}_j$ possède une base orthonormée $\{|m\rangle\}$ avec $m = -j, -j+1, ..., j-1, j$ telle que $J_3|m\rangle = m|m\rangle$ (je rappelle qu'ici $\hbar = 1$).
- Si on définit les opérateurs $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, alors ces opérateurs agissent sur la base $\{|m\rangle\}$ selon

$$J_-\,|m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\,|m-1\rangle, \tag{M.25}$$
$$J_+\,|m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\,|m+1\rangle \tag{M.26}$$

On obtient l'action des opérateurs J_1 et J_2 sur la même base en écrivant que $J_1 = (1/2)(J_+ + J_-)$ et $J_2 = (1/2i)(J_+ - J_-)$.
- Sur chaque espace $\mathcal{H}_j$ l'opérateur de Casimir $C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ se réduit à la constante $j(j+1)$ (multipliée par l'identité).

Cela termine l'étude puisque l'on a l'action de tous les opérateurs de base de l'algèbre de Lie sur une base (formelle) donnée de l'espace de Hilbert, et que par 'exponentiation" on peut reconstruire le groupe.