MQI: Cours 10

Le Moment Cinétique en Mécanique Quantique

On parle aussi de « Moment Angulaire »

Rappels de Mécanique Classique

✦ Le « **moment cinétique (ou angulaire)** » mesure « **la capacité d'un objet à avoir un mouvement de rotation** ». Deux types de rotations peuvent exister:

- Les rotations par rapport à un référentiel fixe extérieur:

=> cela conduit à la définition du « **moment cinétique <u>orbital</u>** » noté $\vec{\ell}$,

- Les rotations de l'objet « sur lui-même » :

$\Rightarrow$ cela conduit à la définition du « **moment cinétique <u>intrinsèque</u>** » (ou **<u>spin</u>**) noté $\vec{s}$

✦ Le **moment cinétique <u>total</u>** $\vec{j}$ d'un objet est donné par $\vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s}$,

✦ Pour un **point matériel**, son **moment cinétique <u>orbital</u>** est donné par: $\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ où $\vec{r}$ est la position et $\vec{p}$ l'impulsion.

✦ **Le moment cinétique est le générateur vectoriel infinitésimal des rotations**.

Le Moment Cinétique Orbital
(générateur des rotations de la position)

Définition/Relations de commutation

Particule 3D Classique:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \wedge \vec{p} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell_x = y\, p_z - z p_y \\ \ell_y = z p_x - x p_z \\ \ell_z = x p_y - y p_x \end{cases}$$

Particule 3D Quantique:

$$\vec{L} = \vec{Q} \wedge \vec{P} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{L}_x = \hat{Y}\, \hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y \\ \hat{L}_y = \hat{Z}\hat{P}_x - \hat{X}\hat{P}_z \\ \hat{L}_z = \hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x \end{cases}$$

. Rappel: $[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = i\hbar\delta_{jk}\, Id_{\mathcal{H}}$

A retenir

Les opérateurs-composantes $\hat{L}_j$ **sont bien hermitiens** car pour $j \neq k$, on a $[\hat{Q}_j, \hat{P}_k] = 0$.

A retenir

Relations de commutation (preuve en utilisant $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$):

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\, \hat{L}_z\,, [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\, \hat{L}_y\,, [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\, \hat{L}_x\,.$$

A retenir

Si l'on note l'observable $\vec{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$, alors:

$$[\vec{L}^2, \hat{L}_x] = [\vec{L}^2, \hat{L}_y] = [\vec{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

Les composantes de $\vec{L}$ comme opérateurs différentiels

Rappels: $\vec{Q}\psi(\vec{r}) = \vec{r}\psi(\vec{r})$ et $\vec{P}\psi(\vec{r}) = -i\hbar\vec{\nabla}\psi(\vec{r})$

D'où: $$\begin{cases} \hat{L}_x = \hat{Y}\,\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y = (-i\hbar)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \hat{L}_y = \hat{Z}\hat{P}_x - \hat{X}\hat{P}_z = (-i\hbar)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \hat{L}_z = \hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x = (-i\hbar)\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Si l'on prend **les coordonnées sphériques** $(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{L}_x = i\hbar\left(\sin\phi\ \partial_\theta + \cos\phi\cot\theta\ \partial_\phi\right) \\ \hat{L}_y = -i\hbar\left(\cos\phi\ \partial_\theta - \sin\phi\cot\theta\ \partial_\phi\right) \\ \boldsymbol{\hat{L}_z = -i\hbar(\partial_\phi)} \end{cases}$$

A retenir

Les opérateurs $\hat{L}_i$ <u>n'agissent pas</u> sur la « variable radiale r »

Moment Cinétique **orbital** et l'espace $L^2(\mathbb{S}^2)$

Le produit scalaire $\langle\psi_1|\psi\rangle$ de **l'espace des états à 3D** $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ peut s'écrire en **coordonnées sphériques**:

$$\langle\psi_1|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1(\vec{r})^*\psi(\vec{r})\, d^3\vec{r} = \int_0^{+\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; \psi_1(r,\theta,\phi)^*\psi(r,\theta,\phi)$$

On peut « voir » $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ comme un produit tensoriel de deux espaces de Hilbert :

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_{\theta,\phi}$$

avec:

- $\mathcal{H}_r = L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr) \Leftrightarrow \langle\psi_1|\psi\rangle_{\mathcal{H}_r} = \int_0^{+\infty} \psi_1(r)^*\psi(r)\, r^2 dr$
- $\mathcal{H}_{\theta,\phi} = L^2(\mathbb{S}^2, \sin\theta\; d\theta d\phi) \Leftrightarrow \langle\psi_1|\psi\rangle_{\mathcal{H}_{\theta,\phi}} = \int_0^{\pi} \sin\theta \;\, d\theta \; \int_0^{2\pi} d\phi\, \psi_1(\theta,\phi)^*\psi(\theta,\phi)$

$\mathbb{S}^2$ est la « sphère de dimension 2 », c'est-à-dire la sphère usuelle: une fonction $f(\theta,\phi)$ est une fonction sur $\mathbb{S}^2$.

Les opérateurs $\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i}}$ agissent en fait sur l'espace $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Moment Cinétique **orbital** en MQ: Question d'ECOC

Question: Comment construire une base orthonormée de $L^2(\mathbb{S}^2)$ « **indexée** » par des valeurs propres d'observables physiques? OU **COMMENT CONSTRUIRE UN ECOC de $L^2(\mathbb{S}^2)$**?

Réponse:

- On ne peut pas prendre plusieurs opérateurs $\hat{L}_i$ car ils ne commutent pas entre eux,
- Par contre $[\vec{L}^2, \hat{L}_i] = 0$, donc en particulier $\{\vec{L}^2, \hat{L}_z\}$ constitue un ensemble de deux observables qui commutent.
- Pourquoi choisir $\hat{L}_z$? Car $\hat{L}_z = -i\hbar(\partial_\phi)$ (expression plus simple),
- **ON MONTRE QUE $\{\vec{L}^2, \hat{L}_z\}$ est un ECOC sur $L^2(\mathbb{S}^2)$**.

A Retenir

Question: Comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\{\vec{L}^2, \hat{L}_z\}$?
Réponse: Méthode algébrique similaire à celle de l'oscillateur harmonique (voir plus loin).

Moment Cinétique **orbital**: Harmoniques sphériques (1)

Les notations de Dirac pour $L^2(\mathbb{S}^2)$: on a des kets $|\psi\rangle$ tels que $\langle\theta,\phi|\psi\rangle \equiv \psi(\theta,\phi) \in L^2(\mathbb{S}^2)$

A retenir

✦ **ON MONTRE** (voir diapos 17-19+poly) que les spectres de $\vec{L}^2$ et $\hat{L}_z$ vérifient:

- Les valeurs propres de $\vec{L}^2$ sont de la forme $\hbar^2\ell(\ell+1)$ **avec** $\ell \in \mathbb{N}$, et chaque **sous-espace propre** $\mathcal{H}_\ell$ associé à la valeur $\hbar^2\ell(\ell+1)$ est de dimension $2\ell+1$,
- Dans chaque sous-espace $\mathcal{H}_\ell$ donné, les valeurs propres de $\hat{L}_z$ sont de la forme $\hbar m$ avec $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell\}$, soit $m \in \mathbb{Z}$ **et** $|m| \leq \ell$.
- **La donnée d'un couple (ℓ, m) définit un seul vecteur propre commun à $\vec{L}^2$ et $\hat{L}_z$** (autrement dit $\hat{L}_z$ n'est pas dégénéré dans le sous-espace $\mathcal{H}_\ell$).

✦ On obtient donc une **base orthonormée** $\{|\ell,m\rangle\}$ de $L^2(\mathbb{S}^2, \sin\theta\; d\theta d\phi)$ telle que:

A retenir

$$\ell \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq \ell, \qquad \vec{L}^2|\ell,m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell,m\rangle \quad \text{et} \quad \hat{L}_z|\ell,m\rangle = \hbar m\,|\ell,m\rangle$$

✦ Les fonctions $\langle\theta,\phi|\ell,m\rangle$ **notées $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$** sont appelées **harmoniques sphériques**:

$$\langle\ell' m'|\ell m\rangle = \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\;\; Y_{\ell' m'}(\theta,\phi)^*\, Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$$

Moment Cinétique **orbital**: Harmoniques sphériques (2)

Quelques aspects calculatoires….

Cherchons les fonctions propres $\psi_\lambda(\theta,\phi)$ de $\hat{L}_z$ telles que $\hat{L}_z\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$:

$$\hat{L}_z\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda \Leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda \Leftrightarrow \psi_\lambda(\theta,\phi) = F_\lambda(\theta)e^{i\frac{\lambda}{\hbar}\phi}$$

Mais la fonction $\psi_\lambda(\theta,\phi)$ **ne peut prendre qu'une seule valeur en un point donné de l'espace** géométrique (coordonnées cartésiennes), donc $\psi_\lambda(\theta,\phi+2\pi) = \psi_\lambda(\theta,\phi)$.

On en déduit que $e^{2i\pi\frac{\lambda}{\hbar}} = 1$. Ce qui implique $\frac{\lambda}{\hbar} = m \in \mathbb{Z}$.

Conclusion: Les valeurs propres de $\hat{L}_z$ sont de la forme $m\hbar$ avec $m \in \mathbb{Z}$, et les fonctions propres associées sont de la forme:

$$\psi_m(\theta,\phi) = F_m(\theta)e^{i\,m\,\phi}$$

A Retenir

Moment Cinétique **orbital**: Harmoniques sphériques (3)

Quelques aspects calculatoires….

$$\vec{\boldsymbol{L}}^2 = \widehat{\boldsymbol{L}}_x^2 + \widehat{\boldsymbol{L}}_y^2 + \widehat{\boldsymbol{L}}_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \text{ et } \widehat{\boldsymbol{L}}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$$

- On montre que les fonctions $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ sont de la forme:

$$Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = C_{\ell,m}\, P_\ell^{|m|}\,(\cos\theta) e^{i\,m\,\phi}$$

Où $C_{\ell,m}$est une constante de normalisation et les $P_\ell^{|m|}(x)$ sont les « polynômes généralisés de Legendre ».

- En particulier (à titre indicatif):

$$Y_{\ell,-\ell}(\theta,\phi) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}} (\sin\theta)^\ell e^{-i\,\ell\,\phi}$$

Donc « la plus simple des harmoniques sphériques » s’écrit:

$$Y_{0,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

Retour sur $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_{\theta,\phi}$

$$\mathcal{H}_r = L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr) \text{ et } \mathcal{H}_{\theta,\phi} = L^2(\mathbb{S}^2, \sin\theta\, d\theta d\phi)$$

✦ Toute fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ **écrite en coordonnées sphériques** admet une décomposition:

$$\psi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} f_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\theta,\phi) \quad \text{avec } f_{\ell m}(r) = \int_{\mathbb{S}^2} \sin\theta d\theta d\phi\, {Y_{\ell m}}^*(\theta,\phi)\, \psi(r,\theta,\phi)$$

Et:

$$\langle\psi|\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \sum_{\ell m} \langle f_{\ell m}|f_{\ell m}\rangle_{\mathcal{H}_r} = \sum_{\ell m} \int_0^{+\infty} r^2 dr |f_{\ell m}(r)|^2$$

✦ L'opérateur Laplacien Δ exprimé en coordonnées sphériques s'écrit:

$$\Delta\,\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,\psi) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\vec{L}^2\psi$$

Particule libre revisitée

Hamiltonien $\widehat{H} = \frac{1}{2m}\vec{P}^2$

Or:

$$\vec{P}^2 = -\hbar^2\Delta = -\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,.) + \frac{1}{r^2}\vec{L}^2$$

Si on pose:

$$\widehat{P}_r = (-i\hbar)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r.) \Rightarrow \widehat{P}_r^2 = -\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\,.)$$

Donc:

$$\vec{P}^2 = \widehat{P}_r^2 + \frac{1}{r^2}\vec{L}^2 \Rightarrow \boxed{\widehat{H} = \frac{1}{2m}\widehat{P}_r^2 + \frac{1}{2mr^2}\vec{L}^2}$$

A retenir

Remarques:

- $\widehat{P}_r^2$ est hermitien dans $\mathcal{H}_r = L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr)$.
- $\{\widehat{H}, \vec{L}^2, \widehat{L}_z\}$ est un ECOC pour la particule libre (détails cours 11)

A retenir

Le Moment Cinétique Générique
(générateurs des rotations en général: orbital, spin)

Définition et algèbre de commutation

Tous les moments cinétiques: orbital $\vec{L}$, spin $\vec{S}$, total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ vérifient la même algèbre de commutateurs qui est caractérisée par les « coefficients de structure » du groupe des rotations.

Hypothèse: **Dans la suite on utilisera la notation générique $\vec{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ correspondant à trois opérateurs hermitiens agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.**

Définition: Les opérateurs $\vec{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ définissent un moment cinétique s'ils vérifient les relation de commutation suivantes:

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\, \hat{J}_z \,,\, [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\, \hat{J}_y \,,\, [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\, \hat{J}_x$$

A Retenir

L'algèbre de commutation: conséquences

✦ **Somme de deux moments cinétiques**:

Soient $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ deux **moments cinétiques** agissant respectivement sur les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Alors $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \equiv \vec{J}_1 \otimes Id_{\mathcal{H}_2} + Id_{\mathcal{H}_1} \otimes \vec{J}_2$ est un **moment cinétique** sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. (Vérification facile car $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ commutent).

Conclusion: la somme de deux moments cinétiques est un moment cinétique.

✦ **Conséquence de l'algèbre de commutation**:

Soit $\vec{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ un moment cinétique. En utilisant $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$ on déduit de la définition d'un moment cinétique que:

$$[\vec{J}^2, \hat{J}_x] = [\vec{J}^2, \hat{J}_y] = [\vec{J}^2, \hat{J}_z] = 0$$

A Retenir

Où on note $\vec{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$.

Les « représentations irréductibles »

Question: quelles sont toutes les façons « irréductibles » (voir ci-dessous la signification) de construire des opérateurs hermitiens $\vec{J} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ vérifiant les conditions de la définition?

Irréductible: déf.
$\vec{J}$ est irréductible s'il ne peut pas s'écrire comme $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ avec $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ deux moments cinétiques.

Remarque: cette question relève d'un domaine mathématique bien connu qui est « la recherche des représentations irréductibles des algèbres de Lie », et cette problématique est une partie très importante de l'étude des groupes de Lie.

Méthode: Il faut trouver un opérateur hermitien $\hat{C}$ qui commute avec les générateurs de l'algèbre ici $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$. Alors on montre que chaque sous-espace propre $\mathcal{H}_c$ associé à une valeur propre c de $\hat{C}$ est **invariant** par les générateurs, ici $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$, et la restriction des $(\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ à chaque sous-espace $\mathcal{H}_c$ est irréductible. => On connait cet opérateur $\hat{C}$: $\hat{C} = \vec{J}^2$.

Recherche des « représentations irréductibles »

✦ **<u>Le programme</u>**:

- Il « suffit » de trouver une **méthode algébrique** permettant de trouver <u>toutes les valeurs propres possibles</u> de l'ensemble $\{\vec{J}^2, \hat{J}_z\}$ qui constitue un ECOC (je l'admet). On en déduit alors qu'<u>il existe une base orthonormée indexée par ces valeurs propres</u>.
- Puis il faut trouver l'expression des opérateurs $\hat{J}_x$ et $\hat{J}_y$ dans cette base.

✦ **<u>Méthode</u>**:

Construire des « **<u>opérateurs d'échelle</u>** » similaires à ceux pour l'oscillateur harmonique.

✦ **<u>Définition des opérateurs d'échelle</u>**:

A Retenir

On définit les opérateurs $\hat{J}_\pm$ par $\boldsymbol{\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\,\hat{J}_y} \Rightarrow \left(\hat{J}_+\right)^\dagger = \hat{J}_-$

$$\boxed{\left[\hat{J}_z, \hat{J}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{J}_\pm \quad \text{et} \quad \left[\hat{J}_-, \hat{J}_+\right] = -2\hbar\hat{J}_z} \qquad \boxed{\vec{J}^2 = \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z + \hat{J}_-\hat{J}_+}$$

Action des opérateurs d'échelle

$$\boxed{\left[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{J}_\pm \text{ et } \left[\hat{J}_-,\hat{J}_+\right] = -2\hbar\hat{J}_z}$$

Supposons $|\phi_\lambda\rangle$ état propre de $\hat{J}_z$ pour la valeur propre $\lambda\hbar$, soit $\hat{J}_z|\phi_\lambda\rangle = \lambda\hbar|\phi_\lambda\rangle$, alors:

$$[\hat{J}_z,\hat{J}_\pm]\,|\phi_\lambda\rangle = \pm\hbar\hat{J}_\pm|\phi_\lambda\rangle \Rightarrow \hat{J}_z\left(\hat{J}_\pm|\phi_\lambda\rangle\right) - \hat{J}_\pm\left(\hat{J}_z|\phi_\lambda\rangle\right) = \pm\hbar\hat{J}_\pm|\phi_\lambda\rangle$$

D'où:

$$\hat{J}_z\left(\hat{J}_\pm|\phi_\lambda\rangle\right) = (\lambda \pm 1)\,\hbar\,\hat{J}_\pm|\phi_\lambda\rangle$$

Conclusion: $\hat{J}_+$ fait « monter » λ de 1 et $\hat{J}_-$ fait « descendre » λ de 1 dans le spectre de $\hat{J}_z$.

Par ailleurs comme $\left[\vec{J}^2,\hat{J}_\pm\right] = \left[\vec{J}^2,\hat{J}_z\right] = 0$, les relations précédentes « travaillent » dans un sous-espace de valeur propre donnée de $\vec{J}^2$.

Un raisonnement algébrique un peu long, trop long pour des diapos (voir poly), permet alors de complètement résoudre le problème....

La diapo suivante donne le résultat.

Représentations: Conclusion

A Retenir

✦ **ON MONTRE** (voir poly) que les spectres de $\vec{J}^2$ et $\hat{J}_z$ vérifient:

- Les valeurs propres de $\vec{J}^2$ sont de la forme $\hbar^2 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}+\mathbf{1})$ **avec** $2\boldsymbol{j} \in \mathbb{N}$, (donc $\boldsymbol{j}$ est <u>entier</u> ou <u>demi-entier</u>) et chaque **sous-espace propre** $\boldsymbol{\mathcal{H}_j}$ associé à la valeur propre $\hbar^2 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}+\mathbf{1})$ est de dimension $2\boldsymbol{j}+\mathbf{1}$,
- <u>Dans chaque sous-espace</u> $\boldsymbol{\mathcal{H}_j}$ donné, les valeurs propres de $\hat{J}_z$ sont de la forme $\hbar\boldsymbol{m}$ avec
- $\boldsymbol{m} \in \{-\boldsymbol{j}, -\boldsymbol{j}+\mathbf{1}, -\boldsymbol{j}+\mathbf{2}, \ldots, \boldsymbol{j}-\mathbf{1}, \boldsymbol{j}\}$, donc $|\boldsymbol{m}| \leq \boldsymbol{j}$ (mais $\boldsymbol{m}$ n'est pas forcément entier),
- **La donnée d'un couple $(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{m})$ définit un <u>seul</u> vecteur propre $|\boldsymbol{j}, \boldsymbol{m}\rangle$ commun à $\hat{\vec{J}}^2$ et $\hat{J}_z$** (autrement dit $\hat{J}_z$ n'est pas dégénéré dans le sous-espace $\boldsymbol{\mathcal{H}_j}$).
- On a les relations:

$$\vec{J}^2|\boldsymbol{j},\boldsymbol{m}\rangle = \hbar^2 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{j}+\mathbf{1})|\boldsymbol{j},\boldsymbol{m}\rangle \quad \textbf{et} \quad \hat{J}_z|\boldsymbol{j},\boldsymbol{m}\rangle = \hbar m|\boldsymbol{j},\boldsymbol{m}\rangle$$

$$\hat{J}_-|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\;\; |j,m-1\rangle$$

$$\hat{J}_+|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\;\; |j,m+1\rangle$$

- En particulier: $\hat{J}_-|j,-j\rangle = 0$ et $\hat{J}_+|j,j\rangle = 0$

Représentations: Remarques

✦ Pour chaque valeur de j on obtient sur le sous-espace $\mathcal{H}_j$ correspondant une représentation irréductible des opérateurs $(\hat{\boldsymbol{J}}_x, \hat{\boldsymbol{J}}_y, \hat{\boldsymbol{J}}_z)$.

✦ Pour chaque valeur de j on peut retrouver l'action des opérateurs $(\hat{\boldsymbol{J}}_x, \hat{\boldsymbol{J}}_y, \hat{\boldsymbol{J}}_z)$ dans la base $\{|m\rangle \equiv |j, m\rangle\}$ de l'espace $\mathcal{H}_j$ grâce aux opérateurs $\hat{J}_\pm$ et les relations $\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$ et $\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-)$.

✦ L'utilisation des « opérateurs d'échelle » $\hat{J}_\pm$ permet (comme dans le cas de l'oscillateur harmonique) d'écrire:

$$|j, -j + n\rangle = C_{j,n}\,(\hat{J}_+)^n |j, -j\rangle \quad \text{et} \quad |j, j - n\rangle = D_{j,n}\,(\hat{J}_-)^n |j, j\rangle$$

Cas particuliers

✦ Si $j \in \mathbb{N}$ on retrouve le cas du **moment cinétique orbital** $\vec{L}$ avec $j = \ell$.

✦ Si $j = \frac{1}{2}$ on trouve la première valeur différente de type « non-orbital », il s'agit du « **spin 1/2** » décrivant le spin de l'électron (par exemple).

- La dimension de l'espace de Hilbert est $2j + 1 = 2$,
- Les valeurs propres de $\hat{J}_z$ sont $\hbar m$ avec $m = \pm\frac{1}{2}$
- Si l'on note $|\pm\rangle$ les kets $|m = \pm 1/2\rangle$, alors les matrices des opérateurs $\hat{J}_\pm$ dans la base $\{|\pm\rangle\}$ s'écrivent:

$$\hat{J}_- = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{J}_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Des relations $\hat{J}_x = \frac{1}{2}(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)$ et $\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-)$ on déduit:

$$\hat{J}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{J}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

FIN COURS 10