MQI: Cours 7

Produit tensoriel d’espaces de Hilbert
Systèmes à plusieurs degrés de liberté
Intrication (introduction)

Produit tensoriel d’espaces de Hilbert

Produit tensoriel (1)

Remarque: Il existe une définition mathématique « abstraite » du **produit tensoriel de deux espaces de Hilbert**. Je me contente ici d'une **définition « pragmatique »** largement suffisante pour les applications.

Définition: Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert respectivement de base orthonormée $\left\{e_i^{(1)}\right\}_{i=1\dots N_1}$ et $\left\{e_j^{(2)}\right\}_{j=1\dots N_2}$.

On appelle espace **produit tensoriel** de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, de base orthonormée $\{f_{ij}\}_{\substack{i=1\dots N_1 \\ j=1\dots N_2}}$, telle que $\langle f_{ij} | f_{i'j'} \rangle = \delta_{i\,i'}\,\delta_{j\,j'}$ et notée $f_{ij} = e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$.

On a donc: $$\langle f_{ij} | f_{i'j'} \rangle = \left\langle e_i^{(1)} \middle| e_{i'}^{(1)} \right\rangle \left\langle e_j^{(2)} \middle| e_{j'}^{(2)} \right\rangle.$$

Conséquences:

- La dimension de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est $\dim(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \dim(\mathcal{H}_1) \times \dim(\mathcal{H}_2)$,
- Un vecteur quelconque $\phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ s'écrit $\phi = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} c_{ij}\; e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$, $c_{ij} \in \mathbb{C}$

Produit tensoriel (2)

Définitions et notations annexes

✦ Soit $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$ et $\phi_2 \in \mathcal{H}_2$ avec $\phi_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \, e_i^{(1)}$ et $\phi_2 = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j \, e_j^{(2)}$, on note $\phi_1 \otimes \phi_2$ le vecteur de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ défini par $\phi_1 \otimes \phi_2 = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \, e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$.

- Tout vecteur $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ **qui peut s'écrire sous la forme $\boldsymbol{\phi_1 \otimes \phi_2}$** est dit « **factorisable** » ou « **séparable** »,
- Tout vecteur $\Phi \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ **qui ne peut pas s'écrire sous la forme $\boldsymbol{\phi_1 \otimes \phi_2}$** est dit « **non-factorisable** » ou « **intriqué** » en MQ (« entangled » en anglais).

Remarque 1: Dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ il existe toujours des vecteurs non-factorisables.

Remarque 2: $\langle \phi_1 \otimes \phi_2 | \psi_1 \otimes \psi_2 \rangle = \langle \phi_1 | \psi_1 \rangle \langle \phi_2 | \psi_2 \rangle$

Produit tensoriel et notations de Dirac: on peut bien sûr manipuler la notation du produit tensoriel rigoureuse $\left| \, e_i^{(1)} \right\rangle \otimes \left| \, e_j^{(2)} \right\rangle$, mais celle-ci est « lourde ». On utilise le plus souvent la notation allégée $|i, j\rangle \equiv \left| \, e_i^{(1)} \right\rangle \otimes \left| \, e_j^{(2)} \right\rangle$ ou $|1\, i, 2\, j\rangle$.

Produit tensoriel (3)

Produit tensoriel et opérateurs

✦ **<u>Produit tensoriel d'opérateurs</u>**: Si on a un opérateur $\hat{A}_1$ agissant sur $\mathcal{H}_1$ de base orthonormée $\left\{e_i^{(1)}\right\}_{i=1\ldots N_1}$ et un opérateur $\hat{A}_2$ agissant sur $\mathcal{H}_2$ de base orthonormée $\left\{e_j^{(2)}\right\}_{j=1\ldots N_2}$ on peut définir « naturellement » un opérateur $\hat{A} = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ agissant sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en posant:

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)\left(e_i^{(1)} \bigotimes e_j^{(2)} \right) = \left(\hat{A}_1\, e_i^{(1)}\right) \otimes \left(\hat{A}_2 e_j^{(2)}\right)$$

$\widehat{A}_1$ « n'agit » que sur la partie venant de $\mathcal{H}_1$ et $\widehat{A}_2$ « n'agit » que sur la partie venant de $\mathcal{H}_2$.

✦ En particulier l'opérateur $\widehat{\mathbb{A}}_1 = \hat{A}_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2}$ « n'agit que sur $\mathcal{H}_1$ » et $\widehat{\mathbb{A}}_2 = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{A}_2$ « n'agit que sur $\mathcal{H}_2$ » et on a en terme de produit d'opérateurs sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$:

$$\widehat{\mathbb{A}}_1 . \widehat{\mathbb{A}}_2 = \widehat{\mathbb{A}}_2 . \widehat{\mathbb{A}}_1 = \hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$$

<u>Conclusion</u>: La transformation $\hat{A}_1 \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_1$ ou $\hat{A}_2 \rightarrow \widehat{\mathbb{A}}_2$ permet « d'étendre » l'action des opérateurs définis initialement sur $\mathcal{H}_1$ ou $\mathcal{H}_2$ à l'espace « plus grand » $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Systèmes à « deux parties »
Intrication (une introduction)

Systèmes à « deux parties »

<u>Hypothèse</u>: On a un système **S1** décrit par des états dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ et un système **S2** décrit par des états dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$.
<u>Question</u>: Quel est l'espace des états du système **S = S1+S2** ?

Réponse

L'espace des états du système S = S1+S2 est l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

✦ L'espace $\mathcal{H}$ contient des états « **factorisés** » de la forme $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$ dans lesquels le système S1 est dans l'état $|\phi_1\rangle$ et le système S2 est dans l'état $|\phi_2\rangle$,

✦ Mais l'espace $\mathcal{H}$ contient aussi des états « **non-factorisables** » ou « **intriqués** » qui ne peuvent pas se mettre sous la forme $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$. **Dans ces cas « intriqués » les parties S1 et S2 du système S ne peuvent pas être associées à un état bien défini.**

<u>Conclusion</u>: Dans des **états intriqués**, les **<u>parties</u> d'un système <u>ne peuvent plus</u> être considérées comme étant elles-mêmes des systèmes** (au sens du Postulat 1)!!!!.

« Histoire de non-séparabilité »

Interprétation de la conclusion précédente

La conclusion précédente affirme que **dans un état intriqué** le système global S = S1 + S2 possède **un ensemble de** propriétés de **corrélations** entre S1 et S2 (ensemble très subtil; très difficile à exprimer en langage courant) qui **ne peut absolument pas être expliqué** par la « somme » de propriétés **séparées** (on dit aussi **locales**), « existant» au niveau de S1 et S2.

Remarque 1: Des corrélations particulières entre S1 et S2 regardées de manière isolées ont souvent une interprétation « locale » possible, **mais pas l'ensemble de toutes les corrélations**.

Remarque 2: Pour distinguer « **l'intrication quantique** » de la simple « **corrélation classique entre évènements d'origine locale** », il faut avoir **la preuve** qu'IL N'EXISTE PAS D'EXPLICATION « LOCALE » POSSIBLE … et les preuves de non-existence ou d'impossibilité à ce niveau de généralité (les « no-go » theorems) sont toujours très difficiles.

[….L'absence de preuve n'est pas une preuve d'absence]

Exemple d'états intriqués (1)

<u>Rappels</u>: Les degrés de liberté de spin d'un électron sont représentés par un espace de Hilbert de dimension 2. La composante $\hat{S}_z$ dans la direction Oz a une base de vecteurs propres $|\pm\rangle$ tels que $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.

<u>Hypothèse 1</u>: On considère **2 électrons E1 et E2** et on s'intéresse <u>uniquement</u> à leurs degrés de liberté de spin.

- On a donc 2 opérateurs de spin $\hat{S}_z^{(1)}$ et $\hat{S}_z^{(2)}$ dans la direction Oz pour E1 et E2,
- L'espace de Hilbert de E1+E2 est $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ de base $|1\,\pm\rangle \otimes |2\,\pm\rangle$,
- On « étend » les opérateurs $\hat{S}_z^{(1)}$ et $\hat{S}_z^{(2)}$ à $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ en posant:
$$\widehat{\mathbb{S}}_z^{(1)} = \hat{S}_z^{(1)} \otimes I_{\mathcal{H}_2} \text{ et } \widehat{\mathbb{S}}_z^{(2)} = I_{\mathcal{H}_1} \otimes \hat{S}_z^{(2)}.$$
- On définit le « spin total » suivant Oz en posant $\hat{S}_z = \widehat{\mathbb{S}}_z^{(1)} + \widehat{\mathbb{S}}_z^{(2)}$.

<u>Hypothèse 2</u>: On s'intéresse à l'état $|\Phi\rangle$ du système E1+E2 défini par:

$$|\boldsymbol{\Phi}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}\left(|\mathbf{1}\,+\rangle \otimes |\mathbf{2}\,-\rangle - |\mathbf{1}\,-\rangle \otimes |\mathbf{2}\,+\rangle\right)$$

Exemple d'états intriqués (2)

Propriétés de l'état $|\boldsymbol{\Phi}\rangle$

$$|\boldsymbol{\Phi}\rangle = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(|\mathbf{1}\,+\rangle \otimes |\mathbf{2}\,-\rangle - |\mathbf{1}\,-\rangle \otimes |\mathbf{2}\,+\rangle)$$

✦ **$|\boldsymbol{\Phi}\rangle$ est un état propre de $\hat{\boldsymbol{S}}_{\boldsymbol{z}} = \hat{\mathbb{S}}_z^{(1)} + \hat{\mathbb{S}}_z^{(2)}$**: $\hat{S}_z|\Phi\rangle = 0$. En fait si l'on définit les opérateurs $\hat{S}_x = \hat{\mathbb{S}}_x^{(1)} + \hat{\mathbb{S}}_x^{(2)}$ et $\hat{S}_y = \hat{\mathbb{S}}_y^{(1)} + \hat{\mathbb{S}}_y^{(2)}$ on a aussi $\hat{S}_x|\Phi\rangle = \hat{S}_y|\Phi\rangle = 0$.

Dans l'état $|\boldsymbol{\Phi}\rangle$ l'ensemble E1+E2 des deux électrons a **un spin nul** !

<u>**Remarque mathématique**</u>: Dans un espace de Hilbert de dim=2, à tout vecteur normalisé $|\phi\rangle$ on peut associer un <u>unique</u> vecteur normalisé $|\phi^\perp\rangle$ tel que $\{|\phi\rangle, |\phi^\perp\rangle\}$ soit une base orthonormée.

✦ On montre alors que $\forall|\boldsymbol{\phi}\rangle$, $|\boldsymbol{\Phi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\phi\rangle \otimes |2\phi^\perp\rangle - |1\phi^\perp\rangle \otimes |2\phi\rangle)$ (voir diapo suivante)

✦ Dit autrement pour « <u>définir</u> » cet état $|\boldsymbol{\Phi}\rangle$ du système E1+E2 **il n'est pas nécessaire** de dire quels sont les états de E1 et E2 intervenant dans $|\boldsymbol{\Phi}\rangle$, **il suffit de dire qu'ils sont orthogonaux.**

Les propriétés « individuelles » de E1 et E2 ne sont pas définies.

Exemple d'états intriqués (3)

Preuve de $\forall|\phi\rangle$, $\quad |\boldsymbol{\Phi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\phi\rangle \otimes |2\phi^{\perp}\rangle - |1\phi^{\perp}\rangle \otimes |2\phi\rangle)$

✦ Tout vecteur $|\phi\rangle$ normalisé s'écrit (à un facteur de phase $e^{i\,\alpha}$ près) dans la base $|\pm\rangle$:

$|\phi\rangle = \cos\theta/2\ |+\rangle + \sin\theta/2\ e^{i\,\varphi}\ |-\rangle$ avec $\theta \in [0,\pi]$ et $\varphi \in [0,2\pi]$

✦ On déduit que le vecteur normalisé $|\phi^{\perp}\rangle$ orthogonal à $|\phi\rangle$ s'écrit (toujours à un facteur de phase près) et encore dans la base $|\pm\rangle$:

$$|\phi^{\perp}\rangle = -\sin\theta/2\, e^{-i\,\varphi}|+\rangle + \cos\theta/2\ |-\rangle$$

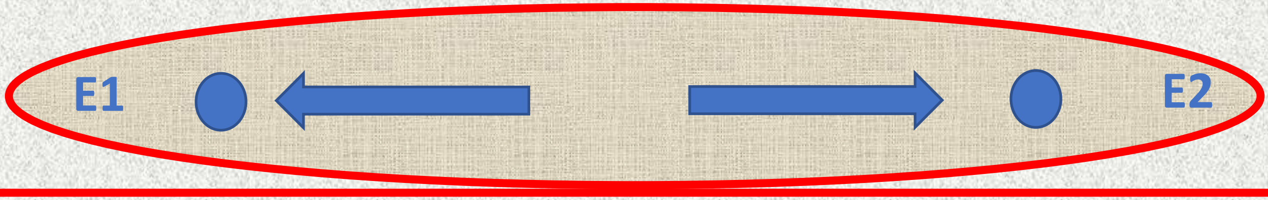
✦ Un calcul direct de $|1\phi\rangle \otimes |2\phi^{\perp}\rangle - |1\phi^{\perp}\rangle \otimes |2\phi\rangle$ (bon exercice) donne:

$$|1\phi\rangle \otimes |2\phi^{\perp}\rangle - |1\phi^{\perp}\rangle \otimes |2\phi\rangle = |1\,+\rangle \otimes |2\,-\rangle - |1\,-\rangle \otimes |2\,+\rangle$$

=> D'où $\forall|\phi\rangle$, $\quad |\boldsymbol{\Phi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\phi\rangle \otimes |2\phi^{\perp}\rangle - |1\phi^{\perp}\rangle \otimes |2\phi\rangle)$

Le « paradoxe » EPR (1)

Hypothèse1: On suppose que les deux électrons E1 et E2 sont « émis » avec deux impulsions opposées, de telle manière que l'on puisse les « mesurer » et les « détecter » très loin l'un de l'autre.



Hypothèse2: E1+E2 est dans l'état $|\Phi\rangle$ et on mesure **uniquement** le spin $\hat{S}_z^{(1)}$ de l'électron E1.

Questions: Quels résultats possibles pour la mesure? Quel est l'état après la mesure?

Réponses: on utilise les postulats de la mesure pour l'observable $\widehat{\mathbb{S}}_z^{(1)} = \hat{S}_z^{(1)} \otimes I_{\mathcal{H}_2}$

Les valeurs observées sont $\pm\frac{\hbar}{2}$

Si $+\frac{\hbar}{2}$ ➡ $|\Phi'\rangle = |1+\rangle \otimes |2-\rangle$

Si $-\frac{\hbar}{2}$ ➡ $|\Phi'\rangle = |1-\rangle \otimes |2+\rangle$

Le « paradoxe » EPR (2)

Les prédictions de la MQ: résumé
(les prédictions sur les mesures ont été vérifiées expérimentalement!)

(a) Lorsque le système E1+E2 est dans $|\Phi\rangle$ **les électrons E1 et E2 n'ont pas d'état de spin individuel bien définis**, et donc **aucune observable de E1 ou E2 ne doit être supposée avoir de valeur définie (d'après l'interprétation standard de la MQ)**,

(b) Lorsque l'on mesure le spin selon Oz de l'électron E1 <u>seulement</u> (observable $\widehat{\mathbb{S}}_z^{(1)}$), on peut affirmer que l'état du système E1+E2 après la mesure est soit $|\Phi'\rangle = |1 +\rangle \otimes |2 -\rangle$, soit $|\Phi'\rangle = |1 -\rangle \otimes |2 +\rangle$, **donc après la mesure de E1 on peut affirmer que l'électron E2 est soit dans l'état $|+\rangle$, soit $|-\rangle$. L'observable $\widehat{\mathbb{S}}_z^{(2)}$ a donc une valeur bien définie.**

Argument physique de localité

La mesure de E1 est un processus qui ne peut « agir physiquement » que sur E1 (**processus « local »),** pas sur E2 qui peut se trouver aussi loin que l'on veut de E1.

Le « paradoxe » EPR (3)

Le « paradoxe » physique

Si les observables de spin sont de « **vraies propriétés physiques** » **<u>attachées</u>** aux électrons E1 et E2 (des « éléments de réalité » de E1 et E2 dans le langage EPR), alors:

- Comment expliquer qu'après la mesure sur E1 seulement, E2 ait maintenant un état bien défini?
- Ou dit autrement comment expliquer qu'une mesure sur seulement E1 arrive à « rendre définie» une observable de E2 (valeur de $\hat{S}_z^{(2)}$), observable qui était supposée « non-définie » avant la mesure de E1?

La conclusion EPR

<u>Si</u> l'on admet les <u>arguments de localité</u> (ce qui ne peut pas être remis en question pour Einstein, Podolsky et Rosen) , la seule manière de « résoudre le paradoxe » est d'admettre qu'il existe « **une cause cachée** » non décrite par la MQ, donc la MQ est « **<u>incomplète</u>** » pour Einstein, Podolsky et Rosen.

Le « raisonnement EPR inversé »

On peut inverser la conclusion de EPR en affirmant:
S'il n'existe pas de « cause cachée », c'est-à-dire **si la MQ est bien « complète » au sens de EPR, je dirai « EPR-complète »,** alors on doit admettre que **les arguments basés sur « la localité » ne sont pas toujours valides en MQ.**

Deuxième version de la conclusion EPR

Si la MQ est « EPR-complète » alors la MQ est « non-locale ».

Peut-on tester la « complétude » au sens de EPR de la MQ ?

Oui, si l'on admet que les « causes éventuellement cachées » sont de type « variables cachées au sens classique »: il faut alors tester expérimentalement les « inégalités de Bell » ou les « inégalités CHSH ».

Résultat (jusqu'à preuve du contraire): **la MQ est EPR-complète**.

L'intrication en quelques articles

Article fondateur du « paradoxe EPR »: Albert Einstein, Boris Podolsky et Nathan Rosen, « Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? », *Phys. Rev.*, vol. 47, **1935**, p. 777-780

Quelques expériences

- **1980-1982**: Alain Aspect et al. (Institut d'optique): preuve de la « violation des inégalités de Bell » avec des photons (A. Aspect, P. Grangier et G. Roger, « **Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem** », Phys. Rev. Lett. 47, 460-463 (1981))
- **2012-2013**: « Non-localité » due à l'intrication non seulement dans l'espace, mais aussi dans le temps (E.Megidish et al., «**Entanglement Between Photons that have Never Coexisted**», arXiv:1209.4191, Phys. Rev. Lett. 110, 210403 (2013))
- **2015**: Intrication entre deux électrons séparés de 1 300 mètres (B. Hensen et al., « **Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres** », *Nature*, vol. 526, n^o 7575, octobre 2015, p. 682–686)
- **2017**: Intrication macroscopique (P. Zarkeshian et al., « **Entanglement between more than two hundred macroscopic atomic ensembles in a solid** », arXiv:1703.04709, Nature Communications 8, 906 (2017))
- **2017**: Photons intriqués envoyés depuis un satellite (orbite à 500km) vers des stations terrestres séparées de 1200 km (Juan Yin *et al.* université des sciences et des technologies de Hefei, en Chine)

FIN COURS 7