# MQI: Cours 2

## Postulats de la MQ

# Postulats de la MQ

**Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger** (12 août 1887 – 4 janvier 1961) physicien, philosophe et théoricien autrichien. En imaginant l'équation d'évolution de la fonction d'onde associée à l'état d'une particule, il a permis le développement du formalisme théorique de la mécanique quantique. Il a reçu, en commun avec Paul Dirac, le prix Nobel de physique de 1933. (Source Wikipedia)

**Max Born** (11 décembre 1882 - 5 janvier 1970) est un physicien allemand. Physicien théoricien remarquable, il est principalement connu pour son importante contribution à la physique quantique. Il a été le premier à donner au carré du module de la fonction d'onde la signification d'une densité de probabilité de présence. Il a partagé le prix Nobel de physique de 1954, avec Walther Bothe, pour ses travaux sur la théorie des quanta. (Source Wikipedia)

**Niels Henrik David Bohr** (7 octobre 1885 à Copenhague, Danemark - 18 novembre 1962 à Copenhague) est un physicien danois. Il est surtout connu pour son apport à l'édification de la mécanique quantique, pour lequel il a reçu de nombreux honneurs. Il est notamment lauréat du prix Nobel de physique de 1922.
(Source Wikipedia)

# Rappel: la Conception Classique en qques règles

- **Les « objets » ont des propriétés qui leur sont « propres » et qui sont accessibles à l'observation.**

- **Les observations de différentes propriétés sont toujours (théoriquement) cumulables en même temps.**

- **=> Par des expériences « astucieuses » nous pouvons toujours avoir accès à ces propriétés sans aucune restriction et sans « perturber significativement » le comportement des objets => l'observateur idéal est un pur spectateur « qui sait tout ».**
  => Un manque d'information est toujours dû à l'observateur imparfait.

- **Les relations entre les propriétés (ainsi que leurs évolutions) vérifient des « lois » (le monde possède des « régularités »).**

- **Le « job » du physicien classique est de découvrir les propriétés « vraies » des objets ainsi que les « lois exactes » qui les relient, lois représentées par des équations mathématiques => Idéalement un « objet matériel classique » peut être exactement remplacé par des « grandeurs mathématiques mesurables » évoluant au cours du temps.**

# Rappel: la MQ & la question « d'objectivité/onticité »

**<u>Nature objective/ontique d'une grandeur physique</u>**: hypothèse (classique) selon laquelle une « grandeur physique » est une « vraie » propriété du monde réel (pas une simple représentation due à notre esprit). Dit autrement cette propriété est supposée « exister en soi » et « appartenir en propre » au système.

**<u>Mesurabilité d'une grandeur</u>**: on admet de plus qu'une propriété objective est toujours « **représentable par/réductible à** » des nombres accessibles à la mesure.

**<u>Conséquence</u> (cf diapo d'avant)**: Une mesure au sens « classique » n'est en fait qu'une « collecte d'information » préexistante. L'observateur « classique » est un pur spectateur.

**<u>Conception d'un « objet » en Physique Classique</u>** : un objet se résume à la liste de toutes ses propriétés physiques qui sont supposées objectivement lui « appartenir » et « <u>toutes</u> exister » en même temps. Un expérimentateur « idéal » particulièrement astucieux est alors théoriquement capable d'avoir accès à « toute l'information », c'est-à-dire aux valeurs de toutes les grandeurs.

=> On peut modéliser un objet classique par une suite de nombres représentant les grandeurs mesurables (et qui font partie d'une certaine structure mathématique).

**<u>Remise en cause due aux « faits expérimentaux quantiques »</u>**: Les réflexions des physiciens les ont conduits à la conclusion que ces faits n'étaient pas compatibles avec « le cadre conceptuel général classique » (indépendamment de toute équation). La seule solution trouvée a été une remise en question globale: (a) remise en question de la « nature objective » des grandeurs, (b) remise en question du « rôle passif » de l'observateur et (c) **abandon de l'idée de pouvoir prédire l'évolution <u>déterministe</u> d'un système individuel**.

=> **Il faut rebâtir complètement un cadre de représentation de la « réalité observable » et définir de nouvelles règles générales**.

# Postulats de la MQ (0)

Résultats des réflexions de « l'Ecole de Copenhague » sur les fondements de la MQ.

**Rôle/objectifs des « postulats »**

(a) Fixer le **<u>nouveau</u>** cadre mathématique (complètement différent) de « représentation » de la « réalité ».

(b) Fixer les « règles strictes » de manipulation de ce cadre mathématique « abstrait » pour faire des prédictions physiques.

**Présupposés et vocabulaire**

**On suppose** dans la suite que le mot « **système** » ou « **objet physique** » a une signification intuitive et implicite suffisamment précise pour ne pas avoir à le définir…(les expériences d'intrication montrent que ceci n'est pas toujours si clair).

**On suppose** qu'un « système » a des « **propriétés mesurables** » (i.e. une mesure donne des résultats) ou « propriétés physiques » que l'on appellera des **observables**…(« éléments de réalité » => Einstein)

# Postulats de la MQ (1): « systèmes » et « observables »

**Postulat 1**

Tout « système physique » S est décrit (à chaque instant) par un vecteur $|\psi\rangle$ **normalisé** appartenant à un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
$|\psi\rangle$ est appelé « **l'état du système** » et $\mathcal{H}$ **l'espace des états du système**.
Remarque : $|\psi\rangle$ **normalisé** signifie $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

Remarque importante: En « vieux langage » on parle du « **Principe de Superposition** » qui dit que la somme de deux états est encore un état possible (structure d'espace vectoriel des états).

**Postulat 2**

Toute grandeur physique $\mathcal{A}$ mesurable ou « **observable du système** S » est représentée par un **opérateur** $\hat{A}$ **hermitien** ($\equiv$ auto-adjoint) agissant sur son espace des états $\mathcal{H}$.

Remarque: Par la suite j'identifierai dans le texte la grandeur $\mathcal{A}$ à sa représentation $\hat{A}$.
Rappels: $\hat{A}$ hermitien $\Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$; et $\hat{A}$ hermitien $\Longrightarrow$ diagonalisable et valeurs propres réelles.

# Postulats de la MQ (2): « Remarques sur les observables »

**Remarques mathématiques/vocabulaire**

Soit $\hat{A}$ une observable (un opérateur hermitien), $\hat{A}$ est diagonalisable en base orthonormée. $\hat{A}$ possède des valeurs propres réelles $(a_n)_{n=1,\ldots\infty}$ (ici les $a_n$ sont supposées toutes distinctes) et des vecteurs propres orthogonaux et normalisés $\left(|e_n^i\rangle\right)_{n=1,\ldots\infty}^{i=1\ldots g_n}$ tels que :

$$\forall \mathrm{n}, \forall i, 1 \leq i \leq g_n,\ \hat{A}|e_n^i\rangle = a_n|e_n^i\rangle$$

car **il est possible que la même valeur propre $\boldsymbol{a_n}$ soit associée à plusieurs vecteurs propres $|\boldsymbol{e_n^i}\rangle$ avec $\boldsymbol{i} \in [\boldsymbol{1}, \boldsymbol{g_n}]$**.

- Les vecteurs propres sont aussi appelés « **états propres de $\widehat{\boldsymbol{A}}$** »,
- Une valeur propre $a_n$ **associée à un seul vecteur propre** $(g_n = 1)$ est dite **non-dégénérée**,
- Une valeur propre $a_n$ **associée à plusieurs vecteurs propres** $(g_n \neq 1)$ est dite **dégénérée**, et $\boldsymbol{g_n}$ est alors appelée la « **dégénérescence** » de $a_n$.

(en maths on parle de « multiplicité »).

# Postulats de la MQ (3): « mesures des observables »

**Postulat 3** | **Valeurs possibles d'une mesure**

Une mesure de l'observable $\hat{A}$ d'un système physique S ne peut donner comme valeurs observées que **les valeurs propres** de l'opérateur $\hat{A}$ .

Remarque: Comme $\hat{A}$ est hermitien ses valeurs propres sont réelles, donc bien « compatibles » avec une mesure.

**Postulat 4** | Règle de Born

- Si le système S est dans l'état $|\psi\rangle$ (**normalisé**), et si l'on mesure l'observable $\hat{A}$,
- Si $\hat{A}$ possède les valeurs propres $(a_n)_{n=1,\ldots\infty}$ et les vecteurs propres orthogonaux et normalisés $\left(|e_n^i\rangle\right)_{n=1,\ldots\infty}^{i=1\ldots g_n}$ tels que $\forall \mathrm{n}, \forall i, 1 \leq i \leq g_n,\ \hat{A}|e_n^i\rangle = a_n|e_n^i\rangle$ (on tient compte de la dégénérescence possible des valeurs propres),
- Alors la **probabilité** $P(a_n)$ d'observer la valeur $a_n$ est donnée par la « règle de Born »

$$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} |\langle e_n^i|\psi\rangle|^2$$

# Postulats de la MQ (4): « mesures et observables »

## Remarques sur la règle de Born

**Remarque 1**

**Si la valeur propre $a_n$ n'est pas dégénérée**, et donc associée à un unique vecteur propre $|e_n\rangle$,

- la règle de Born se simplifie en : $\boldsymbol{P(a_n) = |\langle e_n|\psi\rangle|^2}$
- Si $|\psi\rangle = |e_n\rangle$ alors $P(a_n) = 1 \Longrightarrow$ on est certain du résultat

**Remarque 2**

La règle de Born n'est cohérente que si $\sum_n P(a_n) = 1$. Vérifions le.

Relation de fermeture

$$\sum_n P(a_n) = \sum_{n,i} |\langle e_n^i|\psi\rangle|^2 = \sum_{n,i} \langle\psi|e_n^i\rangle\langle e_n^i|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

**Remarque 3**

Parce qu'il s'agit d'un « postulat fondamental » (et pas d'une règle effective ), la règle de Born « **affirme** » le caractère **intrinsèquement** statistique de la MQ: fondamentalement seules des probabilités sont prédictibles (en général).

# Postulats de la MQ (5): «mesure» et «changement d'état»

**Contexte:** Comment une mesure affecte-t-elle le système? Ou comment tenir compte d'un fait nouveau (résultat de mesure)?
- En « probabilités classiques » on dispose des probabilités conditionnelles:
« **si** on sait que telle propriété est vraie alors les **nouvelles** probabilités sont … »
- En MQ (qui est aussi une théorie statistique) on dispose du postulat suivant (certainement celui le plus âprement discuté).

**Postulat 5** Réduction du paquet d'onde

Supposons: (a) que le système **soit dans l'état $|\psi\rangle$** (normalisé), (b) que **l'on mesure l'observable $\hat{A}$** de valeurs propres $(a_n)_{n=1,\ldots\infty}$ et de vecteurs propres orthogonaux et normalisés $\left(|e_n^i\rangle\right)_{n=1,\ldots\infty}^{i=1\ldots g_n}$ tels que $\forall n, \forall i, 1 \leq i \leq g_n,\ \hat{A}|e_n^i\rangle = a_n|e_n^i\rangle$, et (c) supposons enfin que **l'on observe la valeur particulière $a_{n_0}$**. Alors, **après la mesure**, le système est **dans le nouvel état $|\psi'\rangle$** (normalisé), donné par (cas simplifié $g_{n_0} = 1$ diapo suivante):

$$|\psi'\rangle = \sqrt{1/P(a_{n_0})}\ \sum_{i=1}^{g_{n_0}} \langle e_{n_0}^i|\psi\rangle\, |e_{n_0}^i\rangle$$

# Postulats de la MQ (6): « réduction du paquet d'onde», commentaires

**Remarque 1**

Le nouvel état $|\psi'\rangle$ vérifie $\hat{A}|\psi'\rangle = a_{n_0}|\psi'\rangle$. Le nouvel état est état propre de $\hat{A}$ pour la valeur propre observée.

**Remarque 2**

Si **juste après la première mesure** de $\hat{A}$ qui a donné comme valeur $a_{n_0}$, on effectue **une deuxième mesure** de $\hat{A}$, celle-ci redonnera avec certitude la même valeur $a_{n_0}$ (application de la règle de Born au nouvel état $|\psi'\rangle$).
Dit autrement: « **Si je sais quelque chose, ce que je sais est vrai (proba=1)**. »

**Remarque 3**

**Si la valeur propre $a_{n_0}$ n'est pas dégénérée (situation pratique fréquente)**, et donc associée à un unique vecteur propre $|e_{n_0}\rangle$, « la réduction du paquet d'onde » (l'effet de la mesure) se simplifie en :

$$|\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = |e_{n_0}\rangle$$

# Postulats de la MQ (7): « évolution du système »

**Contexte**: Les postulats précédents font abstraction de l'évolution « naturelle » des systèmes avec le temps. Le dernier postulat spécifie comment s'effectue cette évolution.

**Postulat 6** Equation de Schrödinger

Tout système possède une grandeur particulière appelée « **énergie** ». L'opérateur hermitien correspondant à l'énergie est appelé le **Hamiltonien et noté $\hat{H}$.** L'évolution au cours du temps de l'état $|\psi(t)\rangle$ du système est donnée par l'**équation de Schrödinger**:

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite.

✦ **Les valeurs propres de $\hat{H}$ sont les énergies observables du système**.

✦ **Les vecteurs propres de $\hat{H}$ sont aussi appelés états stationnaires du système (explication plus loin).**

# Postulats de la MQ (8): « Evolution d'un état», commentaires

**Comment « calculer » $|\psi(t)\rangle$ ?**

**Hypothèse**: Supposons que: (a) l'Hamiltonien $\hat{H}$ ait pour **valeurs propres** les $\{E_n\}_{n=1,\ldots,\infty}$ et pour base de **vecteurs propres** normalisés $\{|\varphi_n\rangle\}_{n=1,\ldots,\infty}$, (b) l'état initial $|\psi_0\rangle = |\psi(t=0)\rangle$ s'écrive **dans la base** $\{|\boldsymbol{\varphi}_{\boldsymbol{n}}\rangle\}_{\boldsymbol{n}=\mathbf{1},\ldots,\infty}$: $|\psi_0\rangle = \sum_n c_n(0)\,|\varphi_n\rangle$.

**Question**: Quels sont les coefficients $c_n(t)$ tels que $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)\,|\varphi_n\rangle$ ?

**Réponse**

En écrivant l'équation de Schrödinger $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|\varphi_n\rangle\}_{n=1,\ldots,\infty}$ on obtient:

$$\forall n, \qquad i\hbar\,\frac{dc_n}{dt} = E_n\,c_n(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_n(t) = c_n(0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|\varphi_n\rangle}$$

# Conséquences des postulats de la MQ

## « observables incompatibles»

**On atteint le « cœur » des fondements de la MQ**

# Rappels mathématiques

**Définition du « commutateur »**: Soient deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on appelle **commutateur** de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ l'opérateur noté $[\hat{A},\hat{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

**Théorème**: Soient deux opérateurs **hermitiens** (auto-adjoints) $\hat{A}$ et $\hat{B}$ agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$:

$[\hat{A},\hat{B}] = 0 \Leftrightarrow \hat{A}$ et $\hat{B}$ possèdent une base orthonormée commune de vecteurs propres.

**Conséquence**: Deux opérateurs hermitiens $\hat{A}$ et $\hat{B}$ tels que $[\hat{A},\hat{B}] \neq 0$ **ne sont pas diagonalisables** dans la même base orthonormée.

C'est cette propriété mathématique (l'existence de la « non-commutativité des observables ») qui est « la raison d'être » du formalisme de la MQ: nous allons le voir.

# Observables incompatibles (1)

**Hypothèse 1**: On a un système S et deux observables (deux grandeurs mesurables du système) $\hat{A}$ et $\hat{B}$ qui **ne commutent pas**.
Pour simplifier on suppose que $\hat{A}$ et $\hat{B}$ ont seulement deux valeurs propres non-dégénérées:
- $\hat{A}$ a deux valeurs propres $a$ et $a'$ associée aux vecteurs propres $|a\rangle$ et $|a'\rangle$,
- $\hat{B}$ a deux valeurs propres $b$ et $b'$ associée aux vecteurs propres $|b\rangle$ et $|b'\rangle$,

**Hypothèse 2**: Le système est initialement dans un état $|\psi\rangle$ quelconque et l'on va effectuer une suite (une séquence) de mesures en alternant des mesures de $\hat{A}$ et de $\hat{B}$.
**Remarque**: *Ce « schéma d'expérience » peut être réalisé dans beaucoup de cas concrets*.

**Etape 1**

On fait une mesure de $\hat{A}$

Les postulats nous disent que l'on a la possibilité d'observer les deux valeurs $a$ et $a'$ avec les probabilités $P_1(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$ et $P_1(a') = |\langle a'|\psi\rangle|^2$ (règle de Born).

**Supposons que l'on observe la valeur** « $\boldsymbol{a}$ », alors, après la mesure, le système est dans l'état $|\psi_1\rangle = |a\rangle$ (réduction du paquet d'onde).

# Observables incompatibles (2)

**Etape 2**

Pour « vérifier » que notre mesure de l'étape 1 était bien correcte, on recommence la mesure de $\hat{A}$. On peut donc anticiper que le résultat doit être « $a$ ».

En reprenant la règle de Born de l'étape 1, mais en remplaçant $|\psi\rangle$ par $|\psi_1\rangle = |a\rangle$ on obtient les probabilités $P_2(a) = 1$ et $P_2(a') = 0$. On est donc bien **certain d'obtenir « $\boldsymbol{a}$ »**.
L'état $|\psi_2\rangle$ après la mesure n'a cette fois pas changé car $|\psi_2\rangle = |a\rangle = |\psi_1\rangle$.

**Etape 3**

On décide maintenant de mesurer $\hat{B}$.

La règle de Born nous dit que l'on peut observer les deux valeurs $b$ et $b'$ avec les probabilités $P_3(b) = |\langle b|a\rangle|^2$ et $P_3(b') = |\langle b'|a\rangle|^2$. Aucune de ces probabilités n'est réduite à 0 ou 1 car les observables ne commutant pas, il n'y a pas de règle d'orthogonalité entre les vecteurs.

**Supposons que l'on observe la valeur « $\boldsymbol{b}$ »**, alors, après la mesure, le système est dans l'état $|\psi_3\rangle = |b\rangle$ (réduction du paquet d'onde).

# Observables incompatibles (3)

**Etape 4**

On recommence une mesure de $\hat{A}$.

**Un « physicien classique » prédirait**: si vous avez bien conçu vos expériences, vous avez déterminé aux étapes 1 et 3 les « vraies » valeurs « $a$ » et « $b$ » (les « valeurs objectives ») des grandeurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ , donc une nouvelle mesure de $\hat{A}$ **doit nécessairement redonner la valeur « $a$ ». Dit autrement, pour un « physicien classique », avec des « expériences bien faites », les informations sur le système sont toujours cumulatives**.

Mais les postulats de la MQ nous disent tout autre chose: si on refait une mesure de $\hat{A}$, comme $|\psi_3\rangle = |b\rangle$ on a de nouveau la possibilité d'observer les deux valeurs $a$ et $a'$ avec les probabilités données par la règle de Born $P_4(a) = |\langle a|b\rangle|^2$ et $P_4(a') = |\langle a'|b\rangle|^2$, et **ces probabilités sont « intrinsèques ».**

**Un « physicien quantique » doit donc admettre** que le « simple fait » d'avoir voulu mesurer $\hat{B}$, quelle que soit la manière, a « détruit » l'information sur la valeur de $\hat{A}$. **Les informations sur la valeur de $\hat{A}$ et la valeur de $\hat{B}$ ne peuvent « exister » simultanément**.

# Observables incompatibles (4)

**Deux Interprétations possibles**

**Interprétation 1: « interprétation faible »** Erronée

**Remise en cause limitée**: On se limite à « acter » le résultat précédent. *On admet alors que « notre statut dans l'univers » nous empêche de pouvoir connaître en même temps les valeurs d'observables qui « ne commutent pas »*, mais on ne remet pas en cause « l'existence en soi » des grandeurs et on « préserve » ainsi l'image classique générale.

Ce point de vue a été plus ou moins celui d'Einstein (« Dieu ne joue pas aux dés »). Dans ce point de vue la MQ n'est pas une « vraie théorie fondamentale », mais une sorte de « théorie effective », la « vraie théorie déterministe » restant à être découverte (c'était l'espoir d'Einstein).

Aujourd'hui ce point de vue peut être considéré (quasi-consensus) comme « falsifié » par les expériences d'intrication. C'est-à-dire qu'Einstein avec son « paradoxe EPR » a bien pointé une question essentielle, et en même temps il a donné les outils pour montrer qu'il avait (au moins en partie) tort: la MQ est (jusqu 'à preuve du contraire) fondamentale.

# Observables incompatibles (5)

**Interprétation 2: « interprétation forte »** ← Correcte

**Remise en cause profonde de « l'objectivité/onticité » classique**: On admet que **des grandeurs physiques associées à deux opérateurs qui ne commutent pas ne peuvent pas avoir de valeur définie en même temps**.
Dit autrement « c'est une erreur de raisonnement » que de supposer l'existence de valeurs définies simultanément pour ces grandeurs.
Les inégalités dites « CHSH » (variantes des « inégalités de Bell » ) testent en profondeur ce problème d'existence pour des particules « intriquées ». Cette propriété « étrange » des observables en MQ porte en anglais le nom de: « **Non Contrafactual Definiteness** ».

**Remarque**: « l'objectivité » classique n'est pas complètement perdue. Lorsque le système est dans l'état propre $|a\rangle$, vous avez encore « le droit de penser » que la grandeur représentée par l'opérateur $\hat{A}$ a « objectivement » la valeur « $a$ » (valeur propre associée à $|a\rangle$), voir l'étape 2 précédente. Mais par contre « **vous n'avez pas le droit de penser!!** » que la grandeur associée à $\hat{B}$ a alors une valeur définie car $|a\rangle$ n'est pas vecteur propre de $\hat{B}$.

# Observables incompatibles (6)

**Un article qui a fait date**

MAY 15, 1935 PHYSICAL REVIEW VOLUME 47

## Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?

A. EINSTEIN, B. PODOLSKY AND N. ROSEN, *Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey*

(Received March 25, 1935)

In a complete theory there is an element corresponding to each element of reality. A sufficient condition for the reality of a physical quantity is the possibility of predicting it with certainty, without disturbing the system. In quantum mechanics in the case of two physical quantities described by non-commuting operators, the knowledge of one precludes the knowledge of the other. Then either (1) the description of reality given by the wave function in quantum mechanics is not complete or (2) these two quantities cannot have simultaneous reality. Consideration of the problem of making predictions concerning a system on the basis of measurements made on another system that had previously interacted with it leads to the result that if (1) is false then (2) is also false. One is thus led to conclude that the description of reality as given by a wave function is not complete.

# Conséquences des postulats de la MQ

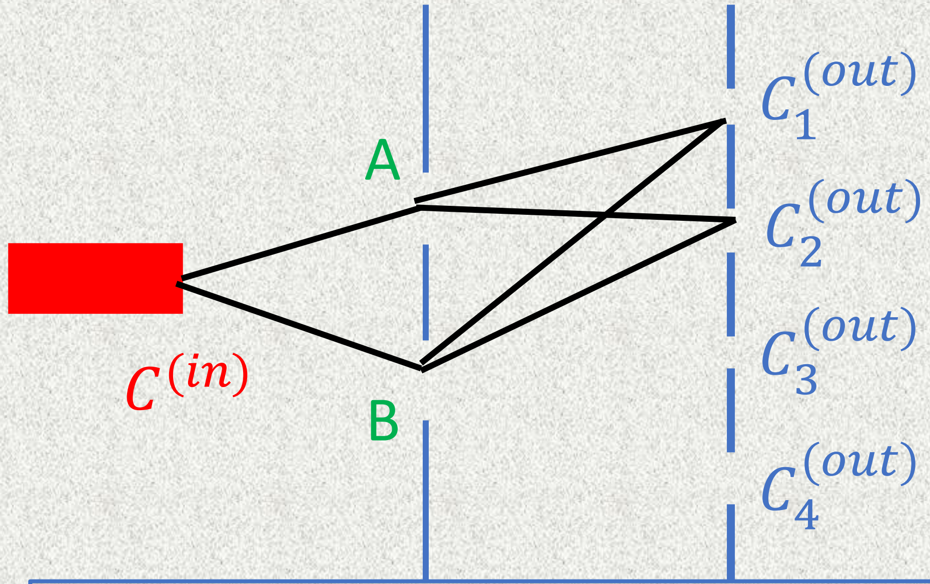
## « Interférences Quantiques»:
## Le problème à deux chemins

# Problème à deux chemins (1)

**Le cadre**

**Hypothèses**: Un « système » se trouve **initialement** dans la « situation » ou « configuration » $C^{(in)}$ et il évolue vers différentes configurations possibles $\left\{C_n^{(out)}\right\}_{n=1\ldots N}$ en empruntant **deux chemins possibles** « A » ou « B ».

*Exemple typique: les fentes d'Young.*




On s'intéresse aux probabilités conditionnelles $P\left(C_n^{(out)} \middle\| C^{(in)}\right)$ « d'observer le système » en $C_n^{(out)}$ si il était initialement en $C^{(in)}$.

$P(E_2 \| E_1)$ **signifie « Probabilité de $E_2$ si $E_1$ »**

**Hypothèse d'indépendance**: on suppose que les deux parties des chemins avant « A/B » et après « A/B » sont indépendantes.

# Problème à deux chemins (2)

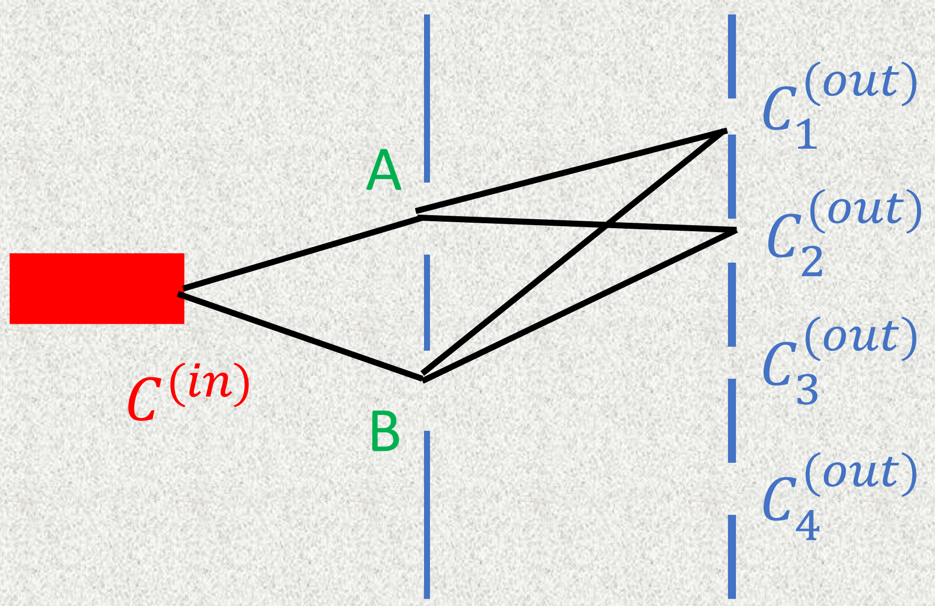
**Calcul classique**

**Hypothèse implicite « naturelle »**: les chemins par « A » et par « B » sont **discernables/exclusifs**.

$$P\left(C_n^{(out)}\,\middle\|\,C^{(in)}\right) = P\left(C_n^{(out)} \| A\right) P\left(A\,\middle\|\,C^{(in)}\right) + P\left(C_n^{(out)} \| B\right) P\left(B\,\middle\|\,C^{(in)}\right)$$

**Indépendance**

**Discernabilité/exclusion**




**Formule vraie à cause de l'hypothèse de discernabilité**: Il est « objectivement vrai » que chaque système prend le chemin « A » ou « B » de manière exclusive. **Dit autrement on peut « réellement discerner » les systèmes passant par « A » de ceux passant par « B ».**

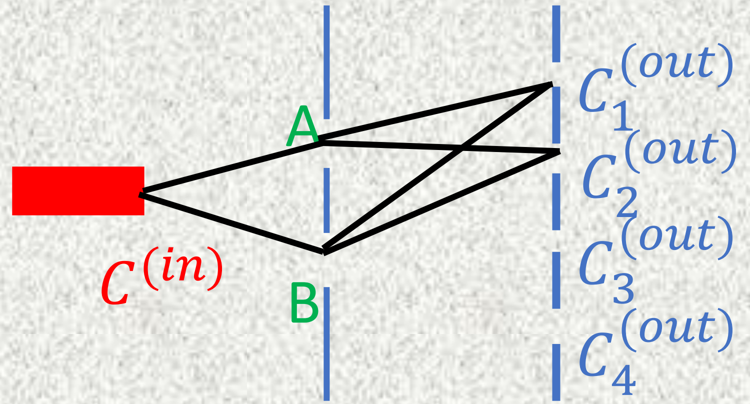
Sans cette hypothèse (naturelle), il n'y a aucun moyen d'obtenir une formule classique. **C'est dans le cas où les passages par les chemins « A » et « B » ne sont pas discernables qu'il y a des interférences quantiques.**

# Problème à deux chemins (3)

**Calcul quantique**

<u>**Hypothèse**</u>: On adopte le « langage quantique » et en suivant la règle de Born:

$$P\left(\psi_2 \| \psi_1\right) \stackrel{\text{def}}{=} |\langle\psi_2|\psi_1\rangle|^2$$




On peut envisager <u>deux cas</u> très différents (<u>selon le dispositif expérimental concret</u>):

- **On peut savoir** (i.e. à partir du dispositif expérimental on pourrait extraire une information sur) le passage du système par « A » ou « B » => **Cas discernable**
- **On ne peut pas savoir** (i.e. à partir du dispositif expérimental il est <u>impossible</u> de mesurer) le passage par « A » ou « B » => **Cas indiscernable**.

# Problème à deux chemins (4)

**Calcul quantique - « deux chemins discernables»: Pas d'interférences**

- Discernabilité => On peut mesurer le passage (exclusif) par « A » ou « B » d'où (règle de Born):

$$P\left(A \,\middle\|\, C^{(in)}\right) = \left|\langle A | C^{(in)} \rangle\right|^2 \text{ et } P\left(B \,\middle\|\, C^{(in)}\right) = \left|\langle B | C^{(in)} \rangle\right|^2$$

- Axiome de la mesure => Si le système passe par « A » (ou par « B »), juste après il est dans

l'état $|A\rangle$ (dans l'état $|B\rangle$) => $P\left(\boldsymbol{C_n^{(out)}} \,\|\, A\right) = \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| A \right\rangle\right|^2$ et $P\left(\boldsymbol{C_n^{(out)}} \,\|\, B\right) = \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| B \right\rangle\right|^2$

- Comme l'hypothèse de discernabilité est vérifiée le calcul classique est correct:

$$P\left(C_n^{(out)} \,\middle\|\, C^{(in)}\right) = P\left(C_n^{(out)} \,\|\, A\right) P\left(A \,\middle\|\, C^{(in)}\right) + P\left(C_n^{(out)} \,\|\, B\right) P\left(B \,\middle\|\, C^{(in)}\right)$$

Soit:

$$\boxed{P_d\left(C_n^{(out)} \,\middle\|\, C^{(in)}\right) = \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| A \right\rangle \langle A | C^{(in)} \rangle\right|^2 + \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| B \right\rangle \langle B | C^{(in)} \rangle\right|^2}$$

$P_d$ : « d » pour probabilité cas discernable

# Problème à deux chemins (5)

**Calcul quantique: Situation « à deux chemins indiscernables »**

**Hypothèse**: On suppose que les chemins « A » et « B » sont « indiscernables », c'est-à-dire que « l'idée de deux chemins exclusifs distincts » n'existe que dans notre esprit => Il n'existe pas de mesure entre « in » et « out » => d'après la règle de Born on a directement:

$$P_{ind}\left(C_n^{(out)} \middle\| C^{(in)}\right) = \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| C^{(in)} \right\rangle\right|^2$$ , ($P_{ind}$ pour indiscernable)

■ Au niveau de « A » et « B » on peut juste dire que l'état $|\psi\rangle$ du système est de la forme

$$|\psi\rangle = \alpha|A\rangle + \beta|B\rangle \text{ avec } \langle A|B\rangle = 0$$

car: (a) le système passe certainement par « l'ensemble AB » et (b) $\langle A|B\rangle = 0$ car si le système passe par « A », il ne passe pas par « B » => On en déduit que $|\boldsymbol{A}\rangle\langle\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}\rangle\langle\boldsymbol{B}| = \boldsymbol{I}_{\mathcal{H}}$.

■ D'où la nouvelle formule :

$$P_{ind}\left(C_n^{(out)} \middle\| C^{(in)}\right) = \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| I_{\mathcal{H}} \middle| C^{(in)} \right\rangle\right|^2 = \left|\left\langle C_n^{(out)} \middle| A \right\rangle \left\langle A \middle| C^{(in)} \right\rangle + \left\langle C_n^{(out)} \middle| B \right\rangle \left\langle B \middle| C^{(in)} \right\rangle\right|^2$$

# Problème à deux chemins (6)

**Calcul quantique - « chemins indiscernables »: apparition des interférences**

$$P_{ind}\left(C_n^{(out)}\,\middle\|\,C^{(in)}\right)=\left|\left\langle C_n^{(out)}\middle|A\right\rangle\left\langle A\middle|C^{(in)}\right\rangle+\left\langle C_n^{(out)}\middle|B\right\rangle\left\langle B\middle|C^{(in)}\right\rangle\right|^2$$

Donc:

$$P_{ind}\left(C_n^{(out)}\,\middle\|\,C^{(in)}\right)=\left|\left\langle C_n^{(out)}\middle|A\right\rangle\left\langle A\middle|C^{(in)}\right\rangle\right|^2+\left|\left\langle C_n^{(out)}\middle|B\right\rangle\left\langle B\middle|C^{(in)}\right\rangle\right|^2+I$$

Ou $$\boldsymbol{P_{ind}\left(C_n^{(out)}\,\middle\|\,C^{(in)}\right)=P_d\left(C_n^{(out)}\,\middle\|\,C^{(in)}\right)+I}$$

Avec $$\boldsymbol{I=2\,\mathrm{Re}\left(\left\langle C^{(in)}\middle|A\right\rangle\left\langle A\middle|C_n^{(out)}\right\rangle\left\langle C_n^{(out)}\middle|B\right\rangle\left\langle B\middle|C^{(in)}\right\rangle\right)}$$

***I*** **est le terme « <u>d'interférence quantique</u> »**

**<u>Conclusion</u>**: La MQ montre que la manipulation théorique d'une « propriété raisonnable » est:

- Physiquement correcte si cette information/propriété existe objectivement
- Physiquement incorrecte si cette « propriété raisonnable » qui « pourrait en principe être mesurée », n'est pas en réalité mesurable dans la situation étudiée.

# Conséquences des postulats de la MQ

« valeurs moyennes »

# Valeurs moyennes (1)

**Contexte**: On s'intéresse à un système dans l'état $|\psi\rangle$ (normalisé) et on mesure une « grandeur physique » représentée par l'opérateur $\hat{A}$. On observe les valeurs propres $(a_n)_{n=1,\ldots\infty}$ de $\hat{A}$ avec une probabilité $P(a_n)$ donnée par la règle de Born. **Peut-on trouver des « formules » donnant les valeurs moyennes et les écarts quadratiques**?

**Notations**: on notera $\langle a_n \rangle_\psi$, $\langle a_n^2 \rangle_\psi$ et plus généralement $\langle f(a_n) \rangle_\psi$ les valeurs moyennes lorsque le système est dans l'état $|\psi\rangle$.

**Remarque**: Les démonstrations seront faites dans le cas simplifié où les valeurs propres de $\hat{A}$ ne sont pas dégénérées, mais les formules finales sont générales.

**Rappel fonction d'opérateur**: Par définition l'opérateur $f(\hat{A})$ a les mêmes vecteurs propres $(|e_n\rangle)_{n=1,\ldots\infty}$ que $\hat{A}$, mais ses valeurs propres sont $f(a_n)$:

$$\hat{A} = \sum_n a_n |e_n\rangle\langle e_n| \Rightarrow f(\hat{A}) = \sum_n f(a_n)\, |e_n\rangle\langle e_n|$$

# Valeurs moyennes (2)

**Calculs de valeurs moyennes « quantiques »**

**Hypothèses**: On a un système dans l'état $|\psi\rangle$ (normalisé) et on mesure une « grandeur physique » représentée par l'opérateur $\hat{A}$ de valeurs propres $(a_n)_{n=1,\ldots\infty}$.

**Formules « quantiques » des valeurs moyennes**

Sous les hypothèses précédentes on a les formules:

$$\langle a_n \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle,$$
$$\langle a_n^2 \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle,$$
$$\langle f(a_n) \rangle_\psi = \langle \psi | f(\hat{A}) | \psi \rangle,$$

**Preuve**

**Formule classique de probabilités**: $\langle a_n \rangle = \sum a_n P(a_n)$ où $P(a_n)$ est la probabilité.

On utilise la règle de Born pour $P(a_n)$: $\langle a_n \rangle_\psi = \sum_n a_n |\langle e_n | \psi \rangle|^2 = \sum_n a_n \langle \psi | e_n \rangle \langle e_n | \psi \rangle$ ,

Donc: $$\langle a_n \rangle_\psi = \langle \psi | (\textstyle\sum_n a_n | e_n \rangle \langle e_n |) | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

$\Longrightarrow$ Même démonstration pour $\langle a_n^2 \rangle_\psi$ et $\langle f(a_n) \rangle_\psi$.

# Valeurs moyennes (4)

## Ecart-Type

<u>**Hypothèses**</u>: On a un système dans l'état $|\psi\rangle$ (normalisé) et on mesure une « grandeur physique » représentée par l'opérateur $\hat{A}$ de valeurs propres $(a_n)_{n=1,\ldots\infty}$. Peut-on trouver une « formule » donnant **l'écart-type** des résultats statistiques obtenus?

**Rappel**: Formule classique de probabilités

L'écart-type $\Delta A$ des mesures des $a_n$ est donné par: $\Delta A = \sqrt{\langle a_n^2\rangle - \langle a_n\rangle^2}$.

**Formule « quantique » de l'écart-type**

Sous les hypothèses mentionnées on a la « formule »:

$$\Delta_\psi A = \sqrt{\langle\psi|\hat{A}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle^2}$$

<u>Preuve</u>: on utilise la « formule quantique des valeurs moyennes ».

# Valeurs moyennes (5)

## Evolution & Etats stationnaires

**Hypothèses**: On suppose que le système est à l'instant initial dans un état (normalisé) $|\psi(t=0)\rangle = |\varphi\rangle$ où $|\varphi\rangle$ est un état propre de l'Hamiltonien avec $\widehat{H}|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$.

**Conséquence 1**: On sait alors que $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E\,t}|\varphi\rangle$

**Conséquence 2**: Pour **toute observable $\widehat{A}$ du système**, sa valeur moyenne $\langle\hat{A}\rangle(t)$ à chaque instant vaut $\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\varphi\rangle$.
**Donc $\langle\widehat{A}\rangle(t)$ en fait ne dépend pas du temps**: la valeur moyenne de toute observable est « stationnaire », d'où le nom « **d'états stationnaires** » donnés **aux états propres de l'Hamiltonien**.

# Valeurs moyennes (6)

## Evolution & Equation de Ehrenfest

**Position du problème**: Soit un système possédant un Hamiltonien $\widehat{H}$ et soit $\hat{A}$ une observable quelconque du système (ne dépendant pas explicitement du temps).
Peut-on trouver une équation différentielle vérifiée par $\langle\hat{A}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ ?

**Réponse**: Oui, c'est l'équation de Ehrenfest:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle(t) = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[\hat{A},\widehat{H}]|\psi(t)\rangle$$

**Preuve**: $\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle(t) = \frac{d}{dt}(\langle\psi(t)|)\hat{A}|\psi(t)\rangle + \langle\psi(t)|\hat{A}\frac{d}{dt}(|\psi(t)\rangle)$.

On utilise Schrödinger $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \widehat{H}|\psi(t)\rangle$, d'où (avec Dirac) $-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|\widehat{H}$ car $\widehat{H} = \widehat{H}^\dagger$. Avec les deux termes on voit apparaitre le <u>commutateur</u> $[\hat{A},\widehat{H}] = \hat{A}\widehat{H} - \widehat{H}\hat{A}$.

# Valeurs moyennes (7)

## Evolution & Equation de Ehrenfest

### Commentaire

Il résulte de l'équation de Ehrenfest que $\frac{d}{dt}\langle\widehat{H}\rangle(t) = 0$. Dit autrement **l'énergie se conserve** au cours du temps **en valeur moyenne** (si $\widehat{H}$ ne dépend pas explicitement du temps, ce qui est le cas très souvent).

Plus généralement **toute observable $\widehat{A}$ (ne dépendant pas explicitement du temps) et telle que $[\widehat{A}, \widehat{H}] = 0$ se conserve aussi en valeur moyenne**.

FIN DU COURS 2