L3-Magistère de Physique Fondamentale
L3 ENS Paris-Saclay
L3 Double licence Maths-Physique

MECANIQUE QUANTIQUE I
Examen partiel du 8 novembre 2021

Durée : 2h

L'utilisation de documents, téléphones portables...est interdite. Les calculatrices sont aussi interdites. Les différentes parties du sujet sont indépendantes.

Opérateur en mécanique quantique

2

On considére un système dont l'espace des états est de dimension 2. Soient $(|1\rangle, |2\rangle)$ une base de cet espace et le vecteur $|u\rangle = (|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$. On se donne l'opérateur $P_u = |u\rangle\langle u|$.

0,5 1. Ecrire la matrice représentant P_u dans la base $(|1\rangle, |2\rangle)$.

0,5 2. P_u est il hermitien ? Justifier.

1 3. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres associés de P_u.

La mesure en mécanique quantique

3

On considère un système dont l'espace des états est de dimension 3. Soit une observable A qui possède deux valeurs propres : a non dégénérée et associée au vecteur propre $|a\rangle$ et b dégénérée deux fois et associée aux deux vecteurs propres $|b, 1\rangle$ et $|b, 2\rangle$. On rappelle que $(|a\rangle, |b, 1\rangle, |b, 2\rangle)$ forme une base orthonormée de l'espace des états. Soit $|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta_1|b, 1\rangle + \beta_2|b, 2\rangle$, où les coefficients α, β_1 et β_2 sont complexes, le vecteur d'état du système.

0,5 1. Quelles sont les résultats possibles d'une mesure de A ?

1 2. Avec quelles probabilités ?

0,5 3. Selon le résultat effectivement obtenu donner l'état juste après la mesure.

1 4. Quelle est la valeur moyenne $< A >$ de A ?

Double puits quantique

15 +0,5

Certaines structures nanoscopiques à base de couches de semi-conducteurs peuvent former un ensemble de deux puits de potentiels profonds et séparés par une distance comparable ou plus petite que leurs largeurs. Cette séparation finie est responsable d'un couplage (par effet tunnel) entre les deux puits. Le système considéré est celui d'un électron plongé dans un tel potentiel. Vu les énergies en jeu, on considère que seuls les niveaux fondamentaux de chaque puits sont pertinents. On se place donc dans le cadre d'un système à 2 niveaux, couplés par effet tunnel. On considèrera deux cas :

- double puits symétrique où les deux puits sont identiques (mêmes largeurs) et on notera E_0 l'énergie du niveau fondamental de chacun.
- double puits asymétrique où les deux puits sont de largeurs différentes et on notera E_g et E_d les énergies du fondamental du puits de "gauche" et de celui de "droite" respectivement.

Dans chaque cas, l'espace des états est donc de dimension 2 et une base "naturelle" est donnée par les vecteurs propres associés aux énergies fondamentales de chaque puits notés pour chaque cas $|\psi_g\rangle$ et $|\psi_d\rangle$. En l'absence d'effet tunnel entre les puits, l'hamiltonien du sytème dans la base $(|\psi_g\rangle, |\psi_d\rangle)$ serait donc :

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{pmatrix}$$

dans le cas symétrique et

$$H_0' = \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & E_d \end{pmatrix}$$

dans le cas asymétrique.

On suppose que le couplage par effet tunnel se traduit par un terme supplémentaire dans l'hamiltonien, terme qui peut s'écrire dans la base $(|\psi_g\rangle, |\psi_d\rangle)$:

$$W = -A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où A est un réel positif.

Cas du double puits symétrique

0,5
1. Ecrire la matrice représentant l'hamiltonien total du système en fonction de E_0 et A dans la base $(|\psi_g\rangle, |\psi_d\rangle)$.

1
2. Déterminer ses énergies propres, qu'on notera E_+ et E_- (avec $E_+ > E_-$) en fonction de E_0 et A.

1
3. Quels sont les vecteurs propres correspondant ? On les notera $|+\rangle$ et $|-\rangle$.

1
4. On suppose qu'à $t = 0$ l'électron est dans le puits de gauche, c'est à dire dans l'état $|\psi_g\rangle$. Déterminer le vecteur d'état de l'électron $|\psi(t)\rangle$ pour tout $t > 0$.

1
5. Quelle est la probabilité de trouver l'électron dans l'état $|\psi_d\rangle$, c'est à dire dans le puits de droite à l'instant t ? Y-a-t-il des instants où l'on est sûr de trouver l'électron dans l'état $|\psi_d\rangle$?

Cas du double puits asymétrique

0,5
6. Ecrire la matrice représentant l'hamiltonien total du système en fonction de E_g, E_d et A dans la base $(|\psi_g\rangle, |\psi_d\rangle)$.

1
7. Déterminer ses énergies propres, qu'on notera E'_+ et E'_- (avec $E'_+ > E'_-$) en fonction de E_g, E_d et A.

0,5 +0,5
8. Montrer que l'effet du couplage par effet tunnel entre les 2 puits sur les énergies propres est du second ordre en A alors qu'il est du premier ordre dans le cas du puits symétrique (évidemment si $|E_g - E_d|$ n'est pas trop petit). Commentez.

   On admet que les vecteurs propres associés à E'_+ et E'_- peuvent s'écrire :

$$|+'\rangle = \cos(\theta/2)|\psi_g\rangle + \sin(\theta/2)|\psi_d\rangle$$
$$|-'\rangle = -\sin(\theta/2)|\psi_g\rangle + \cos(\theta/2)|\psi_d\rangle$$

   où $\tan(\theta) = -2A/\Delta E$ et $\Delta E = (E_g - E_d)$.

1 9. On suppose comme dans le cas précédent qu'à $t = 0$ l'électron est dans le puits de gauche, c'est à dire dans l'état $|\psi_g\rangle$. Déterminer le vecteur d'état de l'électron ($|\psi(t)\rangle$ pour tout $t > 0$.

2 10. Quelle est la probabilité de trouver l'électron dans l'état $|\psi_d\rangle$, c'est à dire dans le puits de droite à l'instant t ? On l'écrira en fonction de A et ΔE. Y-a-t-il des instants où l'on est sûr de trouver l'électron dans l'état $|\psi_d\rangle$?

On rappelle la formule de trigonométrie potentiellement utile pour cette question :

$$\sin^2(\theta) = \frac{\tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)}$$

On applique maintenant un champ électrique F dont l'effet est de rajouter un nouveau terme W_e à l'hamiltonien :

$$W_e = \begin{pmatrix} \alpha_g F & 0 \\ 0 & \alpha_d F \end{pmatrix}$$

où α_g et α_d sont deux constantes positives dépendant des largeurs des deux puits.

0,5 + 0,5 11. Ecrire le nouvel hamiltonien et donner les nouvelles énergies propres $E''_{\pm}$ (toujours avec $E''_+ > E''_-$) en fonction de E_g, E_d, A, α_g, α_d et F (pas/peu de calcul nécessaire !).

1 12. Tracer ces énergies en fonction de F. On supposera $E_g < E_d$ et $\alpha_g < \alpha_d$.

0,5 + 0,5 13. Montrer que la différence d'énergie $\delta = E''_+ - E''_-$ est minimale si la condition de "résonance" entre les deux puits, $E_g + \alpha_g F = E_d + \alpha_d F$, est vérifiée. Que vaut alors δ ?

1 14. A la résonance quelle est, en fonction de A, la fréquence de Bohr du système ?

1 + 0,5 15. On observe expérimentalement que, à résonance, l'électron oscillant entre les 2 sites à la fréquence déterminée précédemment, le sytème émet un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde $\lambda \simeq 0.1$ mm. En déduire l'ordre de grandeur de la valeur du couplage tunnel A. Question subsidiaire : s'agit-il à votre avis d'un couplage faible ou fort ? Argumentez. On donne $\hbar c \simeq 200$ MeV.fm et 1 fm $= 10^{-15}$ m.