L3-Magistère de Physique Fondamentale
L3 ENS Paris-Saclay
L3 Double licence Maths-Physique

**MECANIQUE QUANTIQUE I**
**Examen partiel du 19 octobre 2020**

Durée : 2 heures

*L'utilisation de documents, téléphones portables...est interdite. Les calculatrices sont aussi interdites.*
*Les différentes parties du sujet sont indépendantes,*
*Le barème est fourni à titre indicatif.*

# La mesure en Mécanique Quantique (9-11 points)

On considère un système quantique décrit par un espace des états à trois dimensions. On considère deux observables du système: son Hamiltonien $H$ et une autre observable $A$. Les matrices de $H$ et $A$ dans une base orthonormée $(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$ s'écrivent:

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $E_0$ et $a$ sont des paramètres réels positifs.

1. Vérifier que $H$ et $A$ sont bien des opérateurs hermitiques.

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $H$ et $A$.

3. Quelles sont les valeurs possibles pour une mesure de $H$ ? De $A$ ?

4. On suppose que le système est dans l'état

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{1}{2}|3\rangle$$

Si l'on effectue une mesure de $A$ quel résultat est-on certain d'obtenir? Quel est état $|\psi_1\rangle$ du système juste après la mesure?

5. Après cette mesure de $A$, on mesure maintenant $H$ (l'état étant donc $|\psi_1\rangle$) quelles sont les probabilités d'obtenir la valeur $E_0$? $2E_0$?

6. Supposons que l'on obtienne $E_0$, quel est l'état $|\psi_2\rangle$ du système après la mesure ?

7. L'opérateur se ravise et en fait n'effectue aucune mesure (c'est la pause déjeuner) : il laisse le système évoluer librement, l'état initial étant donc $|\psi_0\rangle$. Quel est est l'état du système $|\psi(t)\rangle$ à l'instant $t$ quand il revient de la cantine ?

8. Il effectue alors à l'instant $t$ une mesure de $A$ : quels sont les résultats possibles et avec quelles probabilités ? Comparer au résultat de la question (4).

# Système à trois niveaux (9-11 points)

Le violet de gentiane (chlorure de méthylrosaniline ) est un colorant de couleur violette utilisé en particulier en biologie. Sa couleur est due au cation $C[C_6H_4N(CH_3)_2]_3^+$, l'anion chlorure $Cl^-$ ne jouant aucun rôle. La structure de ce cation est simple : trois "branches" identiques issues du carbone central, 2 branches successives formant un angle de $2\pi/3$ entre elles. La charge "+" peut être portée par l'une de ces trois branches donnant lieu à 3 configurations distinctes (voir figure) mais équivalentes du point de vue énergétique. On notera $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|3\rangle$ les états correspondant à ces trois configurations et on suppose qu'ils forment une base de l'espace des états. On choisit l'origine des énergies de sorte que, si $H$ est l'hamiltonien du système, les éléments de matrice $\langle i|H|i\rangle = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. La charge "+" peut en fait se déplacer d'une branche à l'autre (par effet tunnel) ce qui couple les trois états de base. Ainsi les éléments de matrice non diagonaux de l'hamiltonien sont non nuls et on pose $\langle i|H|j\rangle = -A$ pour $i \neq j$, où $A$ est une constante réelle positive.

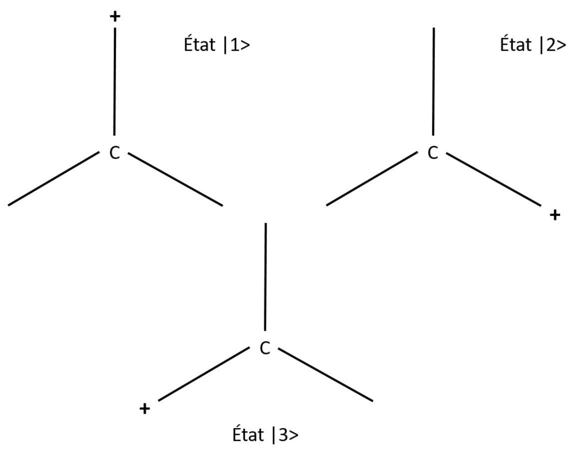


Figure 1: Les trois configurations du violet de gentiane

1. Préliminaire : on considère un système décrit par un espace des états à $N$ dimensions ($N$ fini). On suppose pour simplifier que le spectre de l'hamiltonien $H$ est non dégénéré et note ($|n\rangle$, $E_n$) les couples vecteurs propres/énergies propres. On suppose enfin que l'état du système est un état stationnaire (l'un des vecteurs propres $|n\rangle$ de $H$).

   Dans ce cas, calculer la valeur moyenne de l'énergie $< H >$ ainsi que l'écart quadratique moyen $\Delta H$. En déduire une condition nécessaire pour montrer qu'un certain vecteur est vecteur propre de $H$.
   Question bonus : *est-ce une condition suffisante ? Si oui le démonter, si non donner un contre exemple.*

   Dans tous les cas, le résultat obtenu pour $\Delta H$ est un guide pour trouver un vecteur propre de $H$. Ce guide se généralise évidemment à toute observable.

2. Ecrire la matrice représentant l'hamiltonien du système dans la base ($|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$). Expliquer pourquoi les éléments diagonaux sont nuls et les éléments non diagonaux tous égaux.

3. On considère l'état $|\psi\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$. Calculer la valeur moyenne de l'énergie $< H >$ et l'écart quadratique moyen $\Delta H$ pour cet état. Même question si l'état est maintenant $|\psi'\rangle = (|2\rangle - |3\rangle)/\sqrt{2}$. Que remarque-t-on ?

4. Déterminer les énergies propres du système en fonction de $A$ (valeurs propres de l'hamiltonien). Indiquer leur degré de dégénérescence.

5. Déterminer une base de vecteurs propres associés aux énergies propres trouvées à la question précédente.

6. On donne $A \simeq 0.75$ eV. Expliquer la couleur violette du violet de gentiane. On rappelle les énergies correspondant grossièrement aux couleurs du spectre de la lumière blanche : rouge (1.7 à 2.0 eV), orange (2.0 à 2.1 eV), jaune (2.1 à 2.3 eV), vert (2.3 à 2.6 eV), bleu (2.6 à 2.7 eV) et violet (2.7 à 3.1 eV). On rappelle également les couples principaux de couleurs complémentaires : jaune-violet, rouge-vert et bleu-orange.

**Rappels :** $< A >= \langle\psi|A|\psi\rangle$ et $\Delta A = \sqrt{< A^2 > - < A >^2}$.