L3-Magistère de Physique Fondamentale
L3 ENS Paris-Saclay
L3 Double licence Maths-Physique

MECANIQUE QUANTIQUE I
Examen partiel du 21 octobre 2019

Durée : 3 heures

L'utilisation de documents, téléphones portables...est interdite. Les calculatrices sont aussi interdites.
Les différentes parties du sujet sont indépendantes,
Le barème est fourni à titre indicatif.

La mesure en Mécanique Quantique (4-5 points)

On considère un système quantique décrit par un espace des états à deux dimensions. On considère deux observables du système: son Hamiltonien H et une autre observable A. Les matrices de H et A dans une base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ s'écrivent:

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où E_0 et a sont des paramètres réels positifs.

1. Vérifier que A et B sont bien des opérateurs hermitiques.
2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de H et A.
3. Quelles sont les valeurs possibles pour une mesure de H? De A?
4. On suppose que le système est dans l'état
$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$$
Si l'on effectue une mesure de A quel résultat est-on certain d'obtenir? Quel est état $|\psi_1\rangle$ du système juste après la mesure?
5. Si l'on mesure maintenant H (l'état étant $|\psi_1\rangle$) quelles sont les probabilités d'obtenir la valeur E_0? $-E_0$?
6. Supposons que l'on obtienne E_0, quel est l'état $|\psi_2\rangle$ du système après la mesure ?
7. Si l'on refait maintenant une mesure de A (l'état étant $|\psi_2\rangle$), quelles probabilités a-t-on de mesurer a et $-a$?
Conclure sur l'effet sur le système produit par la mesure de H, étant donné la certitude initiale que l'on avait sur le résultat d'une mesure de A.

Système à deux niveaux (7-8 points)

On considère un système à deux niveaux dont l'hamiltonien s'écrit

$$H_0 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, qui forme donc une base de vecteurs propres de H_0, et où $E > 0$. On rajoute une petite perturbation (dont l'origine exacte n'est pas importante pour la suite) qui va coupler les deux états propres de H_0. L'hamiltonien total s'écrit alors, toujours dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$:

$$H = \begin{pmatrix} -E & W \\ W & E \end{pmatrix}$$

où W est réel. On suppose que $W \ll E$ et on posera $\epsilon = W/2E$. Ce sera donc l'hamiltonien à considérer pour toute la suite de l'exercice.

1. Déterminer les énergies propres de H en fonction de E et ϵ à l'ordre 2 en ϵ . On pourra noter E_+ celle qui est positive et E_- celle qui est négative.

2. Vérifier que les vecteurs

$$|+\rangle = \epsilon|1\rangle + |2\rangle \qquad (1)$$
$$|-\rangle = -|1\rangle + \epsilon|2\rangle \qquad (2)$$

sont bien vecteurs propres de H pour les énergies E_+ et E_- respectivement à l'ordre 2 en ϵ (c'est à dire que l'équation aux valeurs propres est bien vérifiée à cet ordre avec ces vecteurs et les expressions à l'ordre 2 de E_+ et E_- trouvées ci-dessus).

3. Normer ces deux vecteurs (on pourra donner une expression à l'ordre 2 en ϵ).

4. A $t = 0$, on suppose que l'état du système est $|1\rangle$. On mesure à cet instant l'énergie du système perturbé (le hamiltonien est donc H). Quelles résultats peut-on obtenir ? Avec quelles probabilités ? Vérifier que la sommes des probabilités est bien 1 au second ordre en ϵ. Dans chacun des cas donner l'état juste après la mesure.

5. En fait, on ne mesure pas H mais on laisse le système évoluer librement, l'état initial étant $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ à tout instant ultérieur.

6. Quelle est alors la probabilité $P_2(t)$ de trouver le système dans l'état $|2\rangle$ à l'instant t ? Quelle est la fréquence à laquelle oscille cette probabilité ? Y-a-t-il des instants où on est sûr de trouver le système dans l'état $|2\rangle$?

7. A l'instant t, l'état étant $|\psi(t)\rangle$, on mesure l'énergie. Quels sont les résultats possibles et avec quelles probabilités ? Comparer à ce qui a été obtenu à la question 4 et commenter.

8. Calculer finalement la valeur moyenne de l'énergie. Dépend-elle du temps ? Commenter à la lumière de la question précédente.

"Pompage optique" (8-9 points)

On considère un système à deux niveaux avec un terme de pertubation explicitement dépendant du temps (pouvant représenter l'interaction avec une onde électromagnétique par exemple). L'hamiltonien s'écrit alors, dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ (base propre de l'hamiltonien non perturbé) :

$$H = \begin{pmatrix} -E & -\gamma\exp(i\omega t) \\ -\gamma\exp(-i\omega t) & E \end{pmatrix}$$

où E $(E > 0)$, γ et ω sont réels.

1. Déterminer les valeurs propres de H. Dépendent-elles du temps ?

2. Rappeler l'équation de Schrödinger que vérifie un état physique $|\psi(t)\rangle$ (principe d'évolution). Déduire de cette équation que la norme de $|\psi(t)\rangle$ est conservée au cours du temps (même si H dépend explicitement du temps).

3. Montrer qu'il n'existe pas d'état physique (i.e un vecteur $|\psi(t)\rangle$ solution de l'équation de Schrödinger) qui soit vecteur propre de H. Commenter.

   On note $|\phi_1(t)\rangle$ l'état physique tels que $|\phi_1(t=0)\rangle = |1\rangle$. On admet que

   $$|\phi_1(t)\rangle = \exp(i\omega t/2)(\cos\Omega t + i\alpha\sin\Omega t)|1\rangle + \exp(-i\omega t/2) \times i\beta\sin\Omega t|2\rangle$$

   où α, β et Ω sont des constantes réelles.

4. $|\phi_1(t)\rangle$ étant normé, en déduire une relation entre α et β.

5. Déduire de l'équation de Schrödinger que vérifie $|\phi_1(t)\rangle$ un système de 4 équations linéaires à coefficients réels.

6. A partir de deux de ces équations, exprimer α et β en fonction de ω, E, γ et Ω. Montrer en particulier que $\beta = \gamma/(\hbar\Omega)$.

7. De la condition de normalisation du 5, montrer que

   $$(\hbar\Omega)^2 = (E - \frac{\hbar\omega}{2})^2 + \gamma^2. \tag{3}$$

   On suppose que, à $t = 0$, l'état du système est l'état fondamental de l'hamiltonien non perturbé, soit $|\phi(t=0)\rangle = |1\rangle$. L'état à tout instant ultérieur est donc $|\phi_1(t)\rangle$.

8. Montrer que la probabilité $P_2(t)$ de trouver le système dans l'état $|2\rangle$ à l'instant t peut se mettre sous la forme

   $$P_2(t) = P_m(\omega)\sin^2\Omega t$$

   où on exprimera $P_m(\omega)$ en fonction de E, γ et ω en utilisant la relation 3.

9. Montrer que $P_m(\omega)$ passe par un maximum pour une certaine valeur de ω que l'on précisera.

10. La transition de l'état $|1\rangle$ vers l'état $|2\rangle$ est donc favorisée pour cette pulsation. Comment nomme-t-on le phénomène mis en évidence ?

11. Tracer $P_m(\omega)$ en fonction de ω.