CORRIGÉ PARTIEL MQ OCT 2019

Exo 1

1. OK

2. H : $E_0 \to |1\rangle$

$-E_0 \to |2\rangle$

A : $a \to \frac{|1\rangle+|2\rangle}{\sqrt{2}} = |a\rangle$ $\quad -a \to \frac{|1\rangle-|2\rangle}{\sqrt{2}} = |-a\rangle$

3. $\pm E_0$ et $\pm a$

4. $|\psi_0\rangle = |a\rangle \to$ sûr de trouver $+a$.

e_{fin} $|\psi_1\rangle = |\psi_0\rangle = |a\rangle$

5. $P(E_0) = |\langle 1|\psi_1\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ $\quad P(-E_0) = |\langle 2|\psi_1\rangle|^2 = \frac{1}{2}$

6. $E_0 \to |\psi_2\rangle = |1\rangle$

7. $P(a) = |\langle a|\psi_2\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ $\quad P(-a) = \frac{1}{2}$

mesure intermédiaire $\to$ rend aléatoire la mesure de A.

Exo 2

1. $\det(H-\lambda I) = \begin{vmatrix} -E-\lambda & W \\ W & E-\lambda \end{vmatrix} = -(E+\lambda)(E-\lambda) - W^2$

$= -(E^2-\lambda^2) - W^2$

$\to \lambda^2 = E^2+W^2$, $\lambda = \pm\sqrt{E^2+W^2}$

$E_\pm = \pm E\left(1+\frac{W^2}{E^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \pm E\left(1+\frac{W^2}{2E^2}\right) = \pm E(1+2\varepsilon^2)$

2. $H|+\rangle = (-\varepsilon E+W)|1\rangle + (\varepsilon W+E)|2\rangle$

$= E\left(-\varepsilon+\frac{W}{E}\right)|1\rangle + E(1+2\varepsilon^2)|2\rangle$

$= E(\varepsilon)|1\rangle + E(1+2\varepsilon^2)|2\rangle$

et $E_+|+\rangle = E(1+2\varepsilon^2)\left(\varepsilon|1\rangle+|2\rangle\right)$

$= E(\varepsilon+2\varepsilon^3)|1\rangle + E(1+2\varepsilon^2)|2\rangle \simeq E(\varepsilon)|1\rangle + E(1+2\varepsilon^2)|2\rangle$

OK $\quad$ idem pour $|-\rangle$

3. $|+\rangle = \varepsilon|1\rangle+|2\rangle \to |+\rangle = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}|2\rangle$

+ ordre 2 : $|+\rangle \simeq \varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)|1\rangle + \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)|2\rangle$

soit $|+\rangle \simeq \varepsilon|1\rangle + \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)|2\rangle$

ou $|-\rangle \simeq -\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)|1\rangle + \varepsilon|2\rangle$

4. $E_+ \rightarrow P(E_+) = |\langle +|1\rangle|^2 \simeq \varepsilon^2$ état $= |+\rangle$

$E_- \rightarrow P(E_-) = |\langle -|1\rangle|^2 \simeq \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2 \simeq 1-\varepsilon^2$ état $= |-\rangle$

$P(E_+) + P(E_-) = 1$ au 2nd ordre en ε

5. on inverse $\rightarrow |1\rangle \simeq \varepsilon|+\rangle - \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)|-\rangle$

$|\psi(0)\rangle = |1\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = \varepsilon e^{-iE_+t/\hbar}|+\rangle - \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}|-\rangle$

6. $P_2 = |\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$

$= \cancel{\varepsilon^2} \left| \varepsilon e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}}\langle 2|+\rangle - \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}\langle 2|-\rangle \right|^2$

$= \left| \varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - \varepsilon\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} \right|^2$

$= \varepsilon^2\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2 \left| e^{-\frac{iE_+t}{\hbar}} - e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}} \right|^2$

$P_2(t) \simeq 4\varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{E_+-E_-}{2\hbar}t\right)$

"Fréquence de Bohr" $\omega = \frac{E_+-E_-}{\hbar} \simeq \frac{2E}{\hbar}(1+2\varepsilon^2)$

$P_2\ \mathrm{MAX} = 4\varepsilon^2 \ll 1$

7. $E_+ \rightarrow P(E_+) = |\langle +|\psi(t)\rangle|^2 = \varepsilon^2$

$E_- \rightarrow P(E_-) = |\langle -|\psi(t)\rangle|^2 = \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2 \simeq 1-\varepsilon^2$

idem 4 (invariance de la distribution statistique des énergies)

8. $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\left(\varepsilon E_+ e^{-iE_+t/\hbar}|+\rangle - \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right)E_- e^{-\frac{iE_-t}{\hbar}}|-\rangle\right)$

$= \varepsilon^2 E_+ |e^{-}|^2 + (1-\varepsilon^2)E_- |e^{-}|^2$

$= \varepsilon^2 E_+ + (1-\varepsilon^2)E_- = -E$ indép de t.

OK avec 7.

Exo 3

$$H = \begin{pmatrix} -\epsilon & -\gamma e^{i\omega t} \\ -\gamma e^{-i\omega t} & \epsilon \end{pmatrix}$$

1. $\det(H-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\epsilon-\lambda & -\gamma e^{i\omega t} \\ -\gamma e^{-i\omega t} & \epsilon-\lambda \end{vmatrix} = -(\epsilon+\lambda)(\epsilon-\lambda) - \gamma^2$

$\Rightarrow \epsilon_\pm = \pm\sqrt{\epsilon^2+\gamma^2}$ indep. de t

2. $H|\psi(t)\rangle = i\hbar \dfrac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t}$

norme^2 $= \langle\psi|\psi\rangle$ $\qquad \dfrac{d\langle\psi|\psi\rangle}{dt} = \dfrac{d\langle\psi|}{dt}|\psi\rangle + \langle\psi|\dfrac{d|\psi\rangle}{dt}$

$= -\dfrac{1}{i\hbar}\langle\psi|H|\psi\rangle + \langle\psi|\dfrac{1}{i\hbar}H|\psi\rangle$

car H hermitien

$= 0$

3. Par l'absurde. Supposons $\exists|\psi\rangle$ qui vérifie à la fois

(1) $i\hbar\dfrac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$ et $H|\psi\rangle = \epsilon_\pm|\psi\rangle$ (2)

Posons $|\psi\rangle = x|1\rangle + y|2\rangle$

(1) $\rightarrow \begin{cases} -\epsilon x - \gamma e^{i\omega t} y = i\hbar\dot{x} \\ -\gamma e^{-i\omega t} x + \epsilon y = i\hbar\dot{y} \end{cases}$

(2) $\Rightarrow \begin{cases} -\epsilon x - \gamma e^{i\omega t} y = \epsilon_\pm x \\ -\gamma e^{-i\omega t} x + \epsilon y = \epsilon_\pm y \end{cases}$

(1) et (2) $\rightarrow$ $i\hbar\dot{x} = \epsilon_\pm x$ $\quad i\hbar\dot{y} = \epsilon_\pm y$

soit $x = x_0 e^{-i\epsilon_\pm t/\hbar}$ $\quad y = y_0 e^{-i\epsilon_\pm t/\hbar}$

en reportant et en simplifiant par $e^{-i\epsilon_\pm t/\hbar}$

$\begin{cases} -\epsilon x_0 - \gamma e^{i\omega t} y_0 = \epsilon_\pm x_0 \\ -\gamma e^{-i\omega t} x_0 + \epsilon y_0 = \epsilon_\pm y_0 \end{cases}$ dont on ne peut

pas trouver un couple (x_0, y_0) sol^t indep de t.

$\Rightarrow$ (1) et (2) = 2 éq^{ts} pas compatibles.

$\hookrightarrow$ $\nexists$ d'état stationnaire.

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{i\omega t/2}\left(\cos\Omega t + i\alpha \sin\Omega t\right)|1\rangle + e^{-i\omega t/2}\, i\beta \sin\Omega t\,|2\rangle$$

4) $\langle\psi_1|\psi_1\rangle = 1 = \cos^2\Omega t + \alpha^2\sin^2\Omega t + \beta^2\sin^2\Omega t$

$$= \cos^2\Omega t + (\alpha^2+\beta^2)\sin^2\Omega t$$

$$\hookrightarrow \alpha^2+\beta^2 = 1$$

5) $i\hbar \dfrac{\partial|\psi_1\rangle}{\partial t} = H|\psi_1\rangle$

$\rightarrow$

- $i\hbar\left[\dfrac{i\omega}{2}(\cos\Omega t + i\alpha\sin\Omega t) + \Omega(-\sin\Omega t + i\alpha\cos\Omega t)\right]$

$$= -E(\cos\Omega t + i\alpha\sin\Omega t) - \gamma i\beta\sin\Omega t$$

- $i\hbar\left[-\dfrac{i\omega}{2}\, i\beta\sin\Omega t + i\beta\Omega\cos\Omega t\right]$

$$= -\gamma(\cos\Omega t + i\alpha\sin\Omega t) - i\beta E\sin\Omega t$$

mnt

$$-\frac{\hbar\omega}{2}(\cos\Omega t + i\alpha\sin\Omega t) + i\hbar\Omega\sin\Omega t - \alpha\hbar\Omega\cos\Omega t$$

$$= -E\cos\Omega t - i\alpha E\sin\Omega t + i\beta\gamma\sin\Omega t$$

$$\frac{\hbar\omega}{2} i\beta\sin\Omega t - \beta\hbar\Omega\cos\Omega t$$

$$= -\gamma\cos\Omega t + i\alpha\gamma\sin\Omega t + i\beta E\sin\Omega t$$

on sépare Re et Im :

$$\frac{\hbar\omega}{2} + \alpha\hbar\Omega = E \quad (1)$$

$$\alpha\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\Omega = \alpha E + \beta\gamma \quad (2)$$

$$\beta\hbar\Omega = \gamma \quad (3)$$

$$\beta\frac{\hbar\omega}{2} = \beta E - \alpha\gamma \quad (4)$$

6) $(3) \to \beta = \dfrac{\gamma}{\hbar\Omega}$ $\qquad (1) \Rightarrow \alpha = \dfrac{E - \hbar\omega/2}{\hbar\Omega}$

7) $\alpha^2+\beta^2=1 \Rightarrow \left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2/(\hbar\Omega)^2+\frac{\gamma^2}{(\hbar\Omega)^2}=1$

$$\Rightarrow \left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2+\gamma^2=(\hbar\Omega)^2$$

8) $P_2(t)=|\langle 2|\psi_1(t)\rangle|^2$

$$=\beta^2\sin^2\Omega t$$

avec $\beta=\frac{\gamma}{\hbar\Omega} \Rightarrow \beta^2=\frac{\gamma^2}{(\hbar\Omega)^2}=\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2}$

$$P_2(t)=P_m(\omega)\sin^2\Omega t$$

avec $P_m(\omega)=\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2}$

9) $P_m(\omega)=\frac{\gamma^2}{\gamma^2+\left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2}$

Max si $\left(\epsilon-\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2=0 \Rightarrow \omega=\frac{2\epsilon}{\hbar}$ $P_{max}=1$

(Fréquence de Bohr du système non perturbé)

10) Résonance ! Ce n'est pas stricto sensu du pompage optique mais c'est pas loin.

11)