L3-Magistère de Physique Fondamentale
L3 ENS Paris-Saclay
L3 Double licence Maths-Physique

MECANIQUE QUANTIQUE I
Examen du 8 janvier 2022
Durée : 2h

(20,5) +1

L'utilisation de documents, téléphones portables...est interdite. Les calculatrices sont autorisées. Des rappels utiles sont donnés à la fin de l'énoncé.

Moments cinétiques

3,5

On considére un système quantique de moment cinétique $\vec{J}$. On note $|jm\rangle$ les vecteurs propres communs à J^2 et J_z.

0,5 + 0,5 1. Rappeler les valeurs propres de J^2 et J_z en fonction de j et m. A j fixé, quelles sont les valeurs possibles pour m ?

0,25 + 0,25 2. On restreint l'espace des états à $j = 1$. Quelle est la dimension de cette espace ? En donner une base à partir des $|jm\rangle$. On l'ordonnera de la plus petite valeur de m à la plus grande.

0,5 3. Ecrire les matrices de J^2 et J_z dans cette base.

1 + 0,5 4. Ecrire les matrices de J_+ et J_- dans cette base. En déduire celles de J_x et J_y.

Atome dans un piège optique et transition Raman

On considère une onde lumineuse stationnaire de vecteur d'onde k dont l'intensité s'écrit $I(x) = I_0 \sin^2(kx)$ et générant le potentiel sur l' axe Ox (principe du piège optique) :

$$V(x) = V_0 \sin^2(kx) \tag{1}$$

Un nuage d'atomes, de masses m, tous dans le même état et sans interaction entre eux, est piégé au centre de ce "puits". Soit l'un de ces atomes, il est donc astreint à se déplacer sur l'axe Ox (c'est à dire qu'il est confiné selon les directions Oy et Oz par un certain système qu'on ne décrira pas dans ce problème) et piégé autour de $x = 0$. On néglige l'effet tunnel entre arches adjacentes du potentiel (1), c 'est à dire qu'on limite pour l'atome considéré l'extension de $V(x)$ au domaine $|kx| < \pi/2$. On propose d'approximer $V(x)$ par un potentiel harmonique de type $\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ au voisinage de $x = 0$. Les atomes étant tous dans le même état quantique et sans interaction entre eux, il suffit d'étudier le comportement de l'un quelconque d' entre eux.

Etat fondamental

8,5

0,5 + 0,5 1. Développer $V(x)$ au second ordre au voisinage de $x = 0$ et déterminer la pulsation ω de l'oscillateur harmonique équivalent en fonction de V_0, m et k.

0,5 + 0,25 + 0,25 2. Rappeler (sans démonstration) les énergies propres de l'oscillateur harmonique à une dimension en fonction de sa pulsation ω et d'un nombre quantique n dont on précisera les valeurs possibles. Préciser l'énergie du fondamental E_0.

0,5

3. A quelle condition sur E_0 et V_0 l'approximation harmonique du potentiel (1) est-elle valide ?

1+0,5 +0,5

4. Les atomes piégés sont des atomes de Césium de masse $m \simeq 2.2 \times 10^{-25}$ kg et la longueur d'onde du laser utilisé pour générer l'onde stationnaire est $\lambda \simeq 0.85$ μm. Calculer ω puis l'énergie du fondamental estimée par l'approximation harmonique E_0. La "profondeur" du puits est telle que $V_0/\hbar \sim 10^7$ rad/s. L'approximation harmonique est-elle justifiée ?

   On rappelle que la fonction d'onde associée à l'état fondamental $|0\rangle$ est :

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4\sigma^2}\Big)$$

   avec $\sigma = \sqrt{\hbar/2m\omega}$, et que la fonction d'onde correspondante dans l'espace des impulsions est (attention : on note $\bar{\psi}$ la transformée de Fourier de ψ au sens de la mécanique quantique) :

$$\bar{\psi}_0(p) = \langle p|0\rangle = \Big(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\Big)^{1/4} \exp\Big(-\frac{\sigma^2 p^2}{\hbar^2}\Big).$$

0,25+0,25
0,25+0,25
0,25+0,25

5. Ecrire les densités de probabilité pour la position et l'impulsion quand l'atome est dans l'état fondamental $|0\rangle$. En déduire sans calcul les écarts quadratiques moyens Δx_0 et Δp_0 pour cet état. En déduire $\Delta x_0 \Delta p_0$. Commenter.

0,5+0,5

6. Calculer numériquement les dispersions de position Δx_0 et de vitesse $\Delta v_0 = \Delta p_0/m$ en utilisant les valeurs numériques données ci-dessus.

~~0,5~~ 1

7. Expliquer pourquoi l'observation d'un grand nombre d'atomes tous dans le même état (même fonction d'onde $\psi(x,t)$) revient à mesurer la densité de probabilité $|\psi(x,t)|^2$ d'un atome unique.

0,5

8. Pour visualiser les atomes piégés, on coupe le laser responsable du piége optique. Chaque atome initialement piégé devient libre et on admet (propriétés du paquet d'onde gaussien) que la dispersion en impulsion reste constante au cours du temps, $\Delta p(t) = \Delta p_0$, et qu'au bout d'un temps τ suffisament long, $\Delta x(\tau) \simeq \Delta p_0 \tau/m = \Delta v_0 \tau$. Si la résolution de l'appareil d'observation (microscope) permet de bien mesurer les détails de la densité de probabilité dès que $\Delta x(\tau) \simeq 100\mu$m, quel temps τ faut-il attendre ?

Transition Raman 8,5

0,25

9. On note $|1\rangle$ l'état associé au premier niveau excité obtenu pour $n = 1$ et E_1 l'énergie correspondante. Donner E_1.

10. On rappelle que

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\Big(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\Big).$$

0,5

   Exprimer $\hat{a}^\dagger$ en fonction de $\hat{x}$, $\hat{p}$, σ et $\hbar$, où σ a été défini à la question (4).

0,5

11. Sachant que pour un état $|\psi\rangle$, $\langle p|\hat{x}|\psi\rangle = i\hbar\frac{d\bar{\psi}}{dp}$ (action de $\hat{x}$ en représentation p), écrire l'action de $\hat{a}^\dagger$ sur $|\psi\rangle$ en représentation p, c'est à dire $\langle p|\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$.

0,25
+1
+0,5

12. Exprimer $|1\rangle$ en fonction de $\hat{a}^\dagger$ et $|0\rangle$. En déduire, avec la question précédente, la fonction d'onde associée dans l'espace des impulsions, $\bar{\psi}_1(p)$. Ecrire la densité de probabilité en impulsion correspondante.

0,5+0,5

13. Tracer l'allure des densités de probabilité en impulsion pour l'état fondamental et le premier état excité.

   Pour exciter les atomes depuis le niveau fondamental $|0\rangle$ vers le premier état excité $|1\rangle$, on applique un laser auxiliaire de la bonne longueur d'onde pendant une durée Δt que l'on peut contrôler afin de maximiser la transition $0 \to 1$. Pendant cette durée, on admet que l'évolution de chaque atome est décrite par l'hamiltonien dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$H_{trans} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

où g est une constante positive et où on suppose qu'on peut se restreindre au sous-espace des états engendré par $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

0,5+0,5 14. Déterminer les énergies propres et vecteurs propres associés de H_{trans}.

1 15. Sachant que chaque atome est initialement dans l'état $|0\rangle$, déterminer son état $|\psi(t)\rangle$ pour $t \in [0, \Delta t]$. On donnera le résultat dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

0,5+0,5 16. Donner la probabilité de trouver l'atome dans l'état $|1\rangle$. Déterminer la durée la plus courte Δt_{min} pendant laquelle il faut appliquer le laser auxiliaire pour être sûr que l'atome soit dans l'état $|1\rangle$ à cet instant.

0,5 17. Déterminer numériquement Δt_{min} pour $g \simeq 7 \times 10^6$ rad/s.

Cette méthode appelée "transition Raman" associée au piège harmonique précédent permet de préparer les atomes (initialement dans l'état $|0\rangle$) dans l'état $|1\rangle$. Pour visualiser la distribution en impulsion de l'état final on éteint comme en (8) le laser du piège optique et on observe la distribution spatiale des atomes après un temps τ, la largeur de la distribution spatiale étant proportionnelle à la largeur initiale de la distribution en impulsion comme indiqué dans la question (8). La figure 1 montre de telles distributions respectivement pour des atomes dans l'état fondamental (a, c) et dans le premier état excité après une transition Raman (b, d).

0,5+0,5 18. Discuter les distributions expérimentales obtenues. Estimer l'ordre de grandeur du temps τ nécessaire pour l'obtention des images.

+1 19. Question subsidiaire : si on observe le nuage d'atome directement, sans éteindre le piège et sans attendre qu'il "s'étale", peut-on distinguer les 2 cas, tous les atomes dans l'état fondamental ou tous les atomes dans le premier état excité ? Indication : penser à la limite de diffraction d'un instrument d'optique.

Rappels :
Opérateurs d'échelle pour le moment cinétique

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$$

$$J_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|jm \pm 1\rangle.$$

Opérateurs de création et d'annihilation

$$a^{\dagger}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Gaussienne centrée, d'écart-type σ et normalisée

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big) \text{ avec } \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$$

Constante de Planck

$$\hbar \simeq 10^{-34} J.s.$$

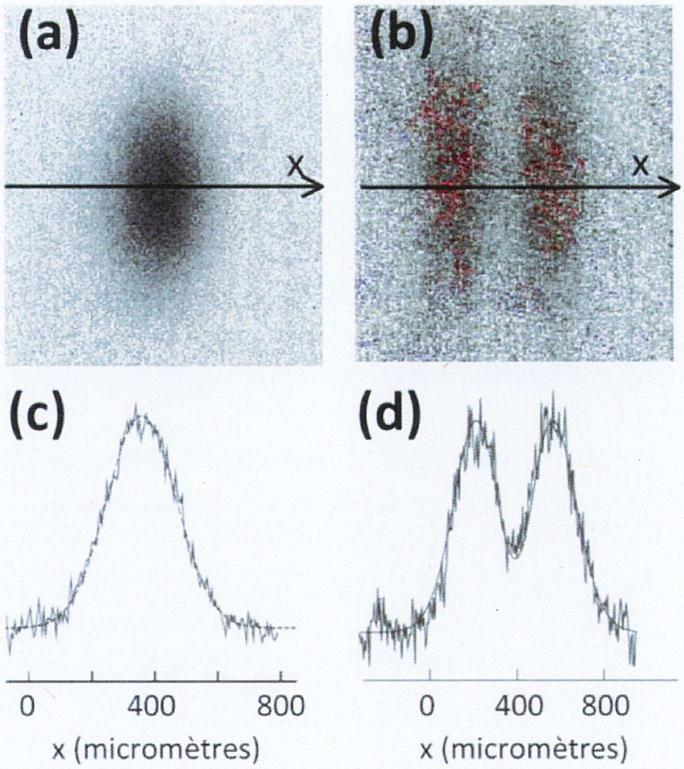

Figure 1: Distribution spatiale des atomes observée à un temps τ après avoir éteint le laser du piège optique. (a) Cas des atomes dans le fondamental. (b) Cas des atomes dans le premier état excité après une transition Raman. (c) Profil selon l'axe des x de la distribution en (a). (d) Profil selon l'axe des x de la distribution en (b).