MQ Exam JAN 2021

Moments cinétiques

1. $J^2 \to \hbar^2 j(j+1)$ $\quad J_3 \to \hbar m$ $\quad -j \leq m \leq j$

$m = -j, -j+1, \ldots, j$

2- $d = 3$ $(m = -1, 0, 1)$ $|1\,-1\rangle, |1, 0\rangle, |1\,1\rangle \to |-\rangle, |0\rangle, |+\rangle$

3) $J^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad J_3 = \hbar \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $J_+ |-\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|0\rangle$ $\quad J_+ |0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|+\rangle$ $\quad J_+|+\rangle = 0$

$J_-|-\rangle = 0$ $\quad J_-|0\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|-\rangle$ $\quad J_-|+\rangle = \hbar\sqrt{2}\,|0\rangle$

$J_+ = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad J_- = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow J_x = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad J_y = \frac{\hbar\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$

ds la base $\{|-\rangle, |0\rangle, |+\rangle\}$

Piège optique

État fondamental

1) $V(x) = V_0 \sin^2 kx \simeq V_0 k^2 x^2$

$$\frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = V_0 k^2 x^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2V_0 k^2}{m}}$$

2) $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \quad n \in \mathbb{N}$

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

3) Fondamental doit être bien "au fond" du puits

$$E_0 \ll V_0$$

4) AN $\omega \simeq \left(\frac{2\times 10^{-34} \times 10^7 \times 4\pi^2}{2.2\times 10^{-25} \times (0{,}85\, 10^{-6})^2}\right)^{1/2}$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$

$$\simeq 7\times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$$

$\frac{E_0}{\hbar} \simeq 3.5\ 10^5 \text{ rad s}^{-1}$ à comparer à $\frac{V_0}{\hbar} \simeq 10^7 \text{ rad s}^{-1}$

ok !

5) $|\Psi_0(x)|^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$|\tilde{\Psi}_0(p)|^2 = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/2} e^{-\frac{2\sigma^2 p^2}{\hbar^2}}$ $\qquad e^{-\frac{p^2}{2\sigma_p^2}}$

on lit directement (lois normales)

$$\begin{cases} \Delta x_0 = \sigma \\ \Delta p_0 = \frac{\hbar}{2\sigma} \end{cases}$$

on remarque $\Delta x_0 \Delta p_0 = \frac{\hbar}{2}$ ("paquet d'onde minimal")

↳ f.o. gaussienne.

6) $\Delta x_0 = \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \simeq \left(\frac{10^{-34}}{2\times 2{,}2\times 10^{-25} \times 7\times 10^{5}} \right)^{1/2}$

$$\Delta x_0 \simeq 18\,\text{nm}$$

$\Delta p_0 = \frac{\hbar}{2\sigma} \simeq \frac{10^{-34}}{2\times 18\,10^{-9}} \Rightarrow \Delta v_0 \simeq \frac{10^{-34}}{2\times 2{,}2\times 10^{-25} \times 18\,10^{-9}}$

$\Delta v_0 \simeq 1.26\ 10^{-2}\ \text{m s}^{-1}$

$\Delta v_0 \simeq 12{,}6\ \text{mm s}^{-1}$

7) $|\psi(x,t)|^2$ reproduit par N (grand) expériences identiques

$\rightarrow$ histogramme des positions

$\rightarrow$ estimation de $|\psi(x,t)|^2$

Ces N expériences identiques peuvent être réalisées au m̂ instant par N atomes différents mais dans le m̂ état quantique, ce qui est le cas ici (Condensat de Bose Einstein)

Plus N $\nearrow$ et plus l'estimation de $|\psi|^2$ est bonne.

8) $\Delta x(\tau) \simeq \Delta v_0 \times \tau \Rightarrow \tau \simeq \frac{100\ 10^{-6}}{1.26\ 10^{-2}} \simeq 8\ \text{ms}.$

Transition Raman

9) $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

10) $a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$

$= \cancel{\frac{\hat{x}}{2\sigma}} \cancel{i \frac{\sigma}{\hbar}} \hat{p} = \frac{\hat{x}}{2\sigma} - i\frac{\sigma}{\hbar}\hat{p}$

11) $\langle p|a^+|\Psi\rangle = \langle p|\frac{\hat{x}}{2\sigma} - i\frac{\sigma}{\hbar}\hat{p}|\Psi\rangle$

$$= \frac{1}{2\sigma}\, i\hbar \frac{d\bar{\Psi}(p)}{dp} - i\frac{\sigma}{\hbar}p\,\bar{\Psi}(p)$$

12) $a^+|0\rangle = \sqrt{1}\,|1\rangle$.

$$\hookrightarrow \bar{\Psi}_1(p) = \langle p|a^+|\Psi_0\rangle$$

$$= \frac{1}{2\sigma}\, i\hbar \frac{d\bar{\Psi}_0}{dp} - i\frac{\sigma}{\hbar}p\,\bar{\Psi}_0$$

avec $\frac{d\bar{\Psi}_0}{dp} = \left(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4}\left(-\frac{2\sigma^2 p}{\hbar^2}\right)e^{-\frac{\sigma^2p^2}{\hbar^2}}$

$$= \frac{-2\sigma^2 p}{\hbar^2}\,\bar{\Psi}_0$$

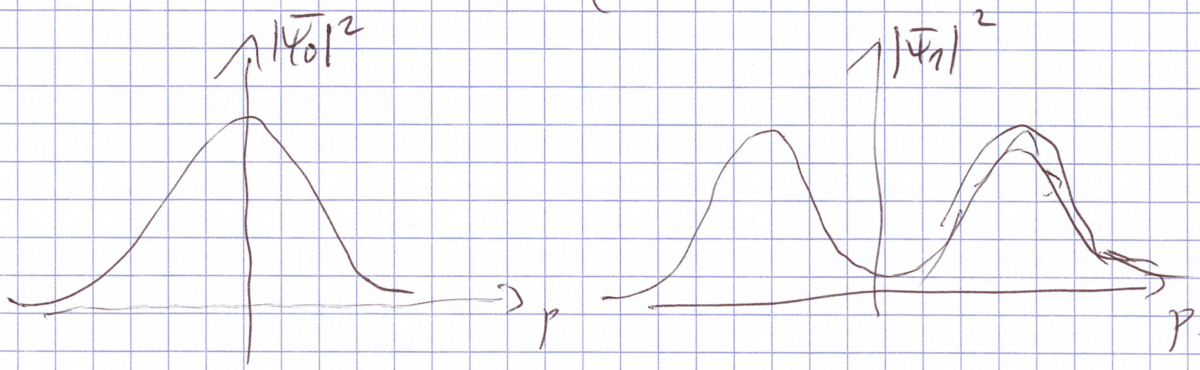
d'où $\bar{\Psi}_1(p) = -\frac{\sigma}{\hbar}ip\,\bar{\Psi}_0 - \frac{i\sigma p}{\hbar}\,\bar{\Psi}_0$

$$\boxed{\bar{\Psi}_1(p) = -2i\frac{\sigma p}{\hbar}\,\bar{\Psi}_0(p)}$$

$$= -\frac{2i\sigma}{\hbar}\times\left(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/4}p\,e^{-\frac{\sigma^2p^2}{\hbar^2}}$$

densité $|\bar{\Psi}_1(p)|^2 = \frac{4\sigma^2}{\hbar^2}\left(\frac{2\sigma^2}{\pi\hbar^2}\right)^{1/2}p^2\,e^{-\frac{2\sigma^2p^2}{\hbar^2}}$

13)



$$H_{trans} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & g \\ g & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ds } \{|0\rangle, |1\rangle\}$$

14) $E_\pm = \pm \frac{\hbar g}{2}$ $\qquad |\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$

15) $|\psi(0)\rangle = |0\rangle = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}}$

$$\hookrightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{e^{-iE_+t/\hbar}|+\rangle + e^{-iE_-t/\hbar}|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{e^{-i\frac{gt}{2}}|+\rangle + e^{i\frac{gt}{2}}|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

soit $|\psi(t)\rangle = \frac{e^{-i\frac{gt}{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{i\frac{gt}{2}}(|0\rangle - |1\rangle)}{2}$

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{gt}{2}\right)|0\rangle - i\sin\left(\frac{gt}{2}\right)|1\rangle}$$

16) $P_1(t) = \sin^2\left(\frac{gt}{2}\right)$ $\qquad P_1(\Delta t) = \sin^2\left(\frac{g\Delta t}{2}\right)$

$$P_1(\Delta t_{min}) = 1 \Leftrightarrow \underline{g\,\Delta t_{min} = \pi}$$

17) AN $\Delta t_{min} \simeq \frac{\pi}{7\times 10^6} \simeq 0{,}45\ \mu s$.

18) Pour le fondamental $\frac{1}{2}$ largeur mi hauteur $\simeq 100\ \mu m$

ce qui correspond à l'AN de la question (8)

donc $\tau \sim 8\,ms$!

5

~~18~~ Forme des distributions

courbes (coupes Ox) (c) et (d) correspondent bien à ce qui a été prédit en (12)-(13).

(19) Le point est de distinguer les 2 distributions correspondant à $n=0$ et $n=1$

↳ Critère de Rayleigh !

$n=1$: séparation entre les 2 pics ~ 200 µm

soit ~ $2 \Delta x_0 (8)$

limite diffraction instrument optique ~ µm → quelques 10$^{\text{aines}}$ de µm

sans la méthode d'élargissement du paquet d'onde gaussien libre : $\Delta x_0 \sim 18$ µm en deçà de la limite de diffraction → on ne peut pas distinguer les 2 pics de $n=1$ et donc on ne peut pas savoir si on a bien préparé les atomes ds l'état $n=1$.