

MECANIQUE QUANTIQUE I
Examen du 09 janvier 2020

Durée : 3 heures

*L'utilisation de documents, téléphones portables...est interdite. Les calculatrices sont autorisées.
Les différentes parties du sujet sont indépendantes
Le barème est fourni à titre indicatif.*

On pourra consulter avec profit les rappels donnés à la fin de l'énoncé.

Produit tensoriel et intrication (3-4 points)

On considère un "atome" ayant deux niveaux d'énergie $E_g = 0$ et $E_e > 0$ non dégénérés et associés aux vecteurs propres de l'hamiltonien que l'on peut noter $|g\rangle$ et $|e\rangle$ respectivement. L'ensemble de ces deux vecteurs est donc une base de l'espace des états de l'atome. On considère dans la suite le système constitué de deux atomes identiques de ce type.

1. Quelle est la dimension de l'espace des états de ce système ?
2. A partir de la base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ engendrant l'espace de Hilbert des états d'un seul atome, expliciter une base de l'espace de Hilbert des états du système formé de deux atomes identiques.
3. Ecrire la matrice représentant l'hamiltonien du système dans cette base en considérant qu'il n'y a pas d'interaction entre les deux atomes.
4. On suppose maintenant que les deux atomes interagissent via l'opérateur énergie potentielle d'interaction $\hat{V} = V_0(|g\rangle \otimes |e\rangle \langle e| \otimes |g\rangle + |e\rangle \otimes |g\rangle \langle g| \otimes |e\rangle)$ où V_0 est un scalaire constant. A quelle condition sur V_0 le potentiel \hat{V} est-il bien un opérateur hermitien ?
5. Donner l'expression de la matrice représentant l'hamiltonien des deux atomes en interaction, dans la base définie dans la question 2.
6. Rappeler la définition d'un état intriqué. Montrer que certains des vecteurs propres de l'hamiltonien sont effectivement intriqués.

Oscillateur harmonique (8-9 points)

On considère une particule de masse m plongée dans un potentiel d'oscillateur harmonique à une dimension. L'hamiltonien de la particule s'écrit donc :

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2. \quad (1)$$

On rappelle que la fonction d'onde normalisée de l'état fondamental s'écrit :

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}. \quad (2)$$

1. Rappeler le spectre de l'hamiltonien \hat{H}_1 . On notera n le nombre quantique impliqué.
2. Vérifier que $\psi_0(x)$ est bien solution de l'équation de Schrödinger stationnaire associée à l'hamiltonien \hat{H}_1 .
3. Montrer que la fonction d'onde (normalisée) associée au premier état excité s'écrit :

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{x}{\sqrt{\hbar/(2m\omega)}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} \quad (3)$$

(on utilisera les opérateurs de création et/ou d'annihilation, voir rappels à la fin de l'énoncé).

On suppose qu'à $t = 0$ le système est préparé dans l'état de fonction d'onde:

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} (\psi_0(x) + \epsilon\psi_1(x)) \quad (4)$$

avec $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ et $\epsilon \ll 1$.

4. Déterminer la fonction d'onde $\psi(x, t)$ pour tout t .
5. En déduire la densité de probabilité de présence $\rho(x, t)$ (on pourra écrire l'approximation au premier ordre inclus en ϵ).
6. Répondre aux questions suivantes en utilisant des arguments simples et un minimum de calculs :
 - A l'instant initial, est-il plus probable d'observer la particule dans la région $x < 0$ ou dans la région $x > 0$?
 - Y-a-t-il des instants où la situation est inversée (donner un exemple) ?
 - Y-a-t-il des instants où il est aussi probable d'observer la particule dans la région $x < 0$ que dans la région $x > 0$?
 - Indiquer qualitativement le comportement temporel des probabilités d'observer la particule dans la région $x < 0$ et dans la région $x > 0$.
7. Calculer les valeurs moyennes $\langle x \rangle(t)$ et $\langle p \rangle(t)$ des observables \hat{x} et \hat{p} pour tout instant t (on exprimera les observables \hat{x} et \hat{p} en fonction des opérateurs création et annihilation). Comparer les résultats obtenus avec le mouvement d'une particule classique dans un potentiel d'oscillateur harmonique.
8. De même calculer les valeurs moyennes de \hat{x}^2 et \hat{p}^2 et donner finalement les écarts quadratiques moyens de \hat{x} et \hat{p} pour tout instant t .

On considère maintenant la même particule plongée dans un potentiel d'oscillateur harmonique à deux dimensions cette fois (piège parabolique 2D) :

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) \quad (5)$$

9. Donner le spectre de l'hamiltonien \hat{H}_2 à partir de celui de \hat{H}_1 .
10. Les énergies du spectre \hat{H}_2 sont-elles dégénérées ? Indiquer la dégénérescence des deux premiers niveaux (fondamental et premier excité).
11. Donner les fonctions d'onde du niveau fondamental et du premier niveau excité en fonction des fonctions d'ondes rappelées dans les équations (2) et (3).

Effet Josephson (8-9 points)

PARTIE A

On considère une “jonction Josephson” constituée d’un fil supraconducteur (de résistance nulle) coupé par une petite plaque isolante (voir la figure 1) et soumis à une différence de potentiel à l’aide d’un générateur de tension (non représenté sur la figure). On note $V = V_A - V_B$ la différence de potentiel de part et d’autre de la plaque. Dans cette partie on suppose $V > 0$.

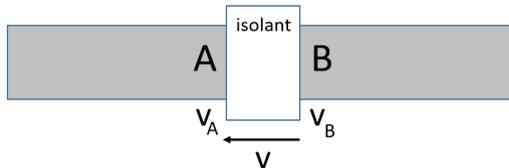


Figure 1: Jonction Josephson constituée d’un fil supraconducteur coupé par une plaque isolante. L’ensemble est relié à un générateur de tension (non montré) de façon à avoir un circuit fermé.

On note q (attention : $q < 0$ dans tout le problème) la charge des porteurs mobiles dans le fil supraconducteur. On rappelle que l’énergie potentielle d’une charge q au point A où le potentiel est V_A est $U_A = qV_A$ et de même $U_B = qV_B$.

1. Selon la physique classique, si il n’y avait pas de plaque isolante, quel serait le sens du mouvement des porteurs de charge ?
2. Toujours selon la physique classique, quelle serait la valeur du courant traversant la plaque isolante ?
3. Quel est le nom du phénomène purement quantique éventuellement responsable du passage du courant ?

On peut modéliser la jonction par une barrière de potentiel dissymétrique de largeur a et de hauteur U_0 (voir figure 2). On considérera donc une particule de masse m et de charge q issue de $+\infty$ et incidente sur une telle barrière.

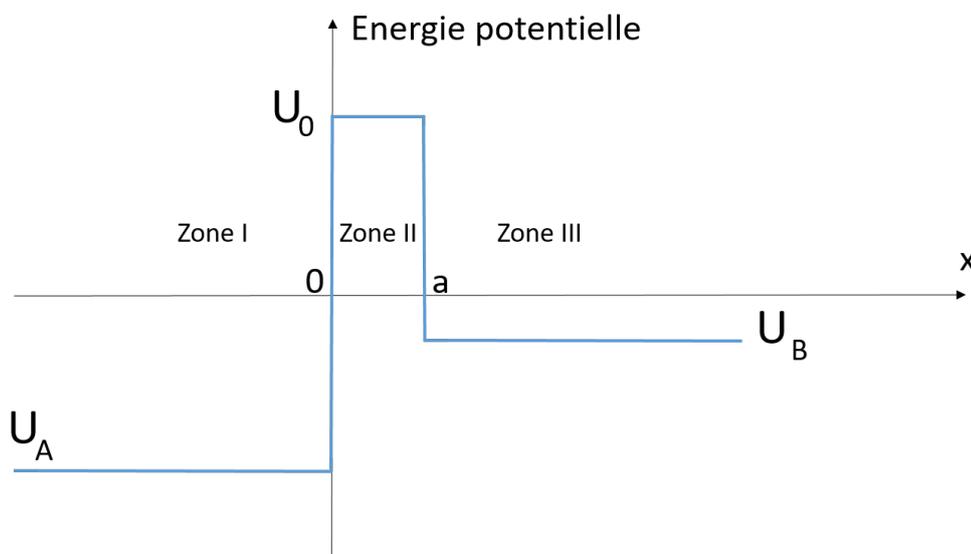


Figure 2: Barrière de potentiel modélisant la jonction Josephson

On considère un état stationnaire d’énergie E telle que $U_B < E < U_0$.

4. Ecrire l’équation de Schrödinger stationnaire que vérifie la fonction d’onde représentant un tel état.

5. Justifier que les fonctions d'onde dans les zones I et III s'écrivent :

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= t \exp(-ik_A x) \\ \psi_{III}(x) &= \exp(-ik_B x) + r \exp(ik_B x)\end{aligned}$$

où t et r sont des scalaires (a priori complexes) et où l'on précisera les expressions de k_A et k_B en fonction de E , m , \hbar , U_A et U_B .

6. Donner l'expression de la solution de l'équation de Schrödinger dans la zone II (intérieur de la barrière). Comment peut-on qualifier la forme de l'expression obtenue ? Obtenir complètement la solution en fonction (entre autres) de t grâce aux relations de continuité en $x = 0$
7. Calculer le courant de probabilité J (voir rappel en fin de sujet) qui traverse la barrière en fonction de t , k_A , \hbar et m . Discuter son signe.

PARTIE B

Le courant introduit dans la partie A est appelé courant Josephson du nom du physicien qui l'a prédit en 1962 (prix Nobel 1973). Pour le déterminer plus complètement, on va préciser la nature des porteurs de charge et simplifier le modèle. Dans le fil supraconducteur (théorie de Bardeen, Cooper¹ et Schrieffer) les porteurs de charges sont en fait des paires d'électrons ("paires de Cooper"), c'est à dire deux électrons liés et délocalisés qui se comportent comme une particule unique. La charge de cette "particule" est donc $q = -2e$. Etant délocalisées, on peut de plus supposer que les paires de Cooper sont dans un état uniforme dans chacune des zones I et III, c'est à dire que leur fonction d'onde ne dépend pas de x . On notera $\psi_A = \sqrt{\rho_A} \exp(i\theta_A)$ et $\psi_B = \sqrt{\rho_B} \exp(i\theta_B)$ les fonctions d'onde dans les zones I et III respectivement, avec ρ_A , ρ_B , θ_A et θ_B fonctions réelles dépendant a priori du temps. Les fonctions d'onde ainsi écrites peuvent s'interpréter comme des fonctions d'onde macroscopiques représentant l'état des porteurs de charge de part et d'autre de la jonction (ce qui suppose que ceux-ci sont dans un même état quantique). Ceci permet d'interpréter directement ρ_A et ρ_B comme les densités des porteurs de charge. Le courant de Josephson couplant les zones I et III, on introduit de plus un terme de couplage $-K$ (avec K constante réelle et positive) entre ψ_A et ψ_B de sorte que les équations de Schrödinger vérifiées par ψ_A et ψ_B s'écrivent :

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial \psi_A}{\partial t} &= U_A \psi_A - K \psi_B \\ i\hbar \frac{\partial \psi_B}{\partial t} &= U_B \psi_B - K \psi_A.\end{aligned}$$

Pour alléger les calculs, on posera $U_A = qV/2$ et $U_B = -qV/2$ (changement d'origine des potentiels).

- Déterminer à partir du système d'équations précédent, les quatre équations donnant respectivement $\dot{\rho}_A$, $\dot{\rho}_B$, $\dot{\theta}_A$ et $\dot{\theta}_B$ en fonction de K , qV , ρ_A , ρ_B et $\varphi = \theta_B - \theta_A$. Indication : séparer parties réelles et imaginaires dans les deux équations du système.
- Calculer $\dot{\rho}_A + \dot{\rho}_B$. Discuter physiquement le résultat.
- Calculer la densité de courant électrique $J = q \times d\rho_A/dt = -q \times d\rho_B/dt$. Mettre J sous la forme (relation de Josephson "courant-phase") :

$$J = J_0 \sin \varphi \tag{6}$$

où on exprimera J_0 en fonction de q , \hbar , K , ρ_A et ρ_B .

- En utilisant les deux équations en $\dot{\theta}_A$ et $\dot{\theta}_B$ obtenues à la question (1) et en supposant que $\rho_A \simeq \rho_B$ (c'est à dire que les densités des porteurs de charge sont les mêmes à l'ordre le plus bas dans les zones I et III ce qui est raisonnable si les fils de part et d'autre de la plaque isolante sont de même nature) établir la relation de Josephson "tension-phase" :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{qV}{\hbar}. \tag{7}$$

Intégrer cette équation en posant $\varphi_0 = \varphi(t = 0)$.

- Cas $V = 0$: montrer qu'il apparait un courant spontané constant. Quelles en sont les valeurs possibles ?

¹Il s'agit bien entendu de Leon N. Cooper et non pas de Sheldon Cooper.

-
6. Cas $V \neq 0$: montrer qu'il apparait un courant alternatif dont on précisera la pulsation.
7. Applications :
- Expliquer pourquoi l'effet Josephson permet une mesure précise du rapport e/\hbar .
 - Comment exploiter l'effet Josephson pour définir l'étalon standard de tension ?
 - Application numérique : si $V = 1\mu\text{V}$, quelle est l'ordre de grandeur de la fréquence du courant alternatif obtenu ?

Rappels

1. Opérateurs de création et d'annihilation

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$
$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right)$$

2. Action des opérateurs création et annihilation sur les vecteurs propres de l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$
$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

3. Courant de probabilité (en dimension 1) :

$$J = \frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)$$

4. Rappels numériques : $e \simeq 1.6 \times 10^{-19}$ C et $\hbar \simeq 10^{-34}$ J.s.